3.1.بناء (صياغة) نموذج البرمجة الخطية

لتوضيح كيفية بناء نموذج خطي يمكن إتباع الخطوات التالية:

1.3.1.متغيرات القرار: هي حلول المسالة (الكميات المثلى) التي يتوجب البحث عن قيمها في ظل محدودية الموارد، كما أنها ترتبط فيما بينها بعلاقة خطية ضمن البرنامج الخطي للمسالة، ونرمز لها بالرمز (X_i).

2.3.1.صياغة دالة الهدف: تعبر دالة الهدف لبرنامج خطي عادة عن هدف اقتصادي كتعظيم الأرباح، تعظيم الإنتاج، أو تخفيض التكاليف، تخفيض الطاقة العاطلة.....الخ، حيث نرمز لهذه الدالة بالرمز (Z).

3.3.1.تشكيل القيود: تعبر عن محدودية الموارد كالطاقة الإنتاجية، القوى العاملة، الوقت، الآلات، المواد الأولية، .....الخ، والتي يتم تخصيصها على حسب قيم متغيرات القرار، وهذه القيود يمكن أن تكون على شكل (= أو $\leq$ أو $\geq$).

وتنقسم القيود إلى نوعين:

- **القيود الداخلية**: وهي كل عناصر الإنتاج التي تدخل في تركيبة المنتج؛
- **القيود الخارجية**: هي كل الالتزامات التي تتعلق بالسوق من إنتاج وتسويق؛

4.3.1.إضافة قيود اللاسلبية: والتي تشترط أن متغيرات القرار تكون موجبة أو معدومة.[1]

بناء على ما سبق فإن الصيغة العامة للبرنامج الخطي سواء كان على شكل تعظيم (Max) أم تصغير (Min) تأخذ الشكل التالي:[2]

$$\begin{cases} \text{Max or Min}(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \\ \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n(\leq, \geq, \text{or} =)b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n(\leq, \geq, \text{or} =)b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \quad\quad\quad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n(\leq, \geq, \text{or} =)b_m \end{cases} \\ X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيود قد تكون على شكل متراجحات أو معادلات، كذلك لابد أن تكون قيم متغيرات القرار غير سالبة.

تمثل $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ متغيرات القرار التي يجب البحث عن قيمها المثلى، وتعبر $(C_1, C_2, \ldots, C_n)$ عن معاملات دالة الهدف قد تكون أرباح وحدوية أو تكاليف وحدوية، وتعبر $(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ عن الموارد المتاحة، أما $(a_{ij}(i = 1, \ldots n; j = 1, \ldots m))$ فهي معلمات فنية (معاملات القيود).

---

[1] - A.M.Natarajan & Other, « Operations Research », 4th edtition, Pearson education, india, 2009, p23.
[2] - A.M.Natarajan & Other, Op cit, p14.

مثال(1):[3]

تقوم شركة الكرة الفضية بتصنيع ثلاث أنواع من آلات كرة الإبرة "فليبرز"، إذ يتطلب كل نوع تقنية تصنيع مختلفة، وتتطلب آلة من نوع (super ball deluxe) 2 ساعة عمل و3 ساعات اختبار، وتحقق هذه الآلة ربحا قدره 300 دولارا؛ في حين تطلب الة من نوع (ball deluxe) ساعة عمل، و4 ساعات اختبار وهي تحقق ربحا قدره 200 دولارا، وتحتاج آلة من نوع (bumper king) إلى 2 ساعة عمل وساعتي اختبار، وتحقق ربحا قدره 100 دولارا، ويفترض توافر 1000 ساعة عمل و30000 دقيقة اختبار.

بالإضافة إلى ذلك قد أظهرت دراسة تنبؤ بالسوق أن الطلب على النوع (super ball deluxe) لن يزيد عن 50 آلة، في حين أن الطلب على(ball deluxe) و (bumper king) سيبلغ 200 آلة بالضبط.

المطلوب: صغ هذه المسألة في شكل برنامج خطي؟.

الحل:

للحصول على البرنامج الخطي لهذه المسالة(المشكلة) وجب إتباع الخطوات التالية:

- **تحديد متغيرات القرار**:

X_1: عدد الآلات من نوع (super ball deluxe)؛

X_2: عدد الآلات من نوع (ball deluxe)؛

X_3: عدد الآلات من نوع (bumper king).

- **تشكيل دالة الهدف:**

وحدة واحدة مباعة من نوع (super ball deluxe)، ينتج عنها ربحا قدره 300×1 ون.

2 وحدة مباعة من نوع (super ball deluxe)، ينتج عنها ربحا قدره 300×2 ون.

فإذا كان X_1 وحدة مباعة من نوع (super ball deluxe)، فإن الربح المتوقع هو $X_1 \times 300$ ون.

كذلك عند بيع كمية قدرها X_2 ، فإن الربح هو $X_2 \times 200$ ون.

نفس الشيء عند بيع المنتوج الثالث، فمثلا عند بيع كمية قدرها X_3 ، فإن الربح هو $X_3 \times 100$ ون.

بما أن المؤسسة تهدف إلى تعظيم الربح من خلال بيع كميات معينة من المنتوجات الثلاثة، فإن شكل الدالة (Z) تأخذ (Max) وبالتالي تصبح كالأتي:

$$Max(Z) = 300X_1 + 200 X_2 + 100 X_3$$

- **تشكيل القيود**: هنا نلاحظ وجود ثلاث أنواع من القيود.

– **القيود الداخلية**: يتم تشكيل القيود كما يلي:

---

[3]– د. حسام مراد وآخرون،" بحوث العمليات"، المركز العربي للتعريب والترجمة والنشر، دمشق، 1998، ص61

وحدة واحدة من المنتوج الأول تستغرق 2 سا×1.
وحدتين من المنتوج الأول تستغرق 2 سا×2.

فإذا كان X_1 وحدة من المنتوج الأول فإنها تستغرق 2 سا × X_1 .
وحدة واحدة من المنتوج الثاني تستغرق 1 سا×1.
وحدتين من المنتوج الثاني تستغرق 1 سا×2.

فإذا كان X_2 وحدة من المنتوج الثاني فإنها تستغرق 1 سا × X_2 .
وحدة واحدة من المنتوج الثالث تستغرق 2 سا×1.
وحدتين من المنتوج الثالث تستغرق 2 سا×2.

فإذا كان X_3 وحدة من المنتوج الثالث فإنها تستغرق 2 سا × X_3 .
مع العلم أن الوقت المستغرق في إنتاج المنتجات الثلاثة الخاص بساعات العمل يجب أن لا يتعدى 1000 ساعة، وعليه يصبح القيد الأول كالأتي:

$$2X_1 + 1X_2 + 2X_3 \leq 1000$$

لتشكيل القيد الثاني الخاص بساعات الاختبار نتبع نفس العملية، وعليه نحصل على:

$$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 500$$

- **القيود الخارجية:**

حسب دراسة السوق فان الطلب على النوع الأول على الأكثر 50 آلة، وبالتالي هذا القيد يكتب على الشكل الأتي:

$$X_1 \leq 50$$

الكمية المباعة من المنتجين الثاني والثالث 200 وحدة بالضبط، هذا القيد يكتب على النحو التالي:

$$X_2 + X_3 = 200$$

- **قيود اللاسلبية:**

لا يمكن إنتاج كميات سالبة من كل الأنواع الثلاثة، أي: X_1، X_2 و X_3 على الأقل تأخذ قيمة معدومة، ومنه نكتب القيود على الشكل التالي:

$$X_1 \geq 0 \ , \ X_2 \geq 0, \ X_3 \geq 0.$$

إذن البرنامج الخطي لهذه المسالة هو كالتالي:

مصطفاي باسين

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 300X_1 + 200\,X_2 + 100\,X_3 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 1000 \\ 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 500 \\ X_1 \leq 50 \\ X_2 + X_3 = 200 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0. \end{cases}$$

مثال (2):[4]

تقوم شركة (MY) بإنتاج مشروبات غازية من مصنعين مختلفين في منطقتين (T1) و (T2)، حيث كل مصنع ينتج ثلاث منتجات مختلفة هي (A، B، C)، والجدول الموالي يوضح الطاقة الإنتاجية لكل مصنع خلال اليوم:

المنتجات	المصنع الأول (قارورة)	المصنع الثاني (قارورة)
A	6000	2000
B	1000	2500
C	3000	3000

حسب قسم التسويق فإن الطلب المتوقع على المنتج (A) هو 80000 قارورة، والمنتج (B) هو 22000 قارورة، والمنتج (C) هو 40000 قارورة خلال شهر جوان القادم، مع العلم أن تكلفة الإنتاج اليومية في المصنعين هي 6000، 4000 ون على التوالي.

المطلوب: استخدم طريقة البرمجة الخطية لصياغة المسالة من أجل تخفيض التكاليف؟

الحل:

- **تحديد متغيرات القرار**

X_1: عدد أيام العمل في المصنع الأول؛

X_2: عدد أيام العمل في المصنع الثاني.

- **تشكيل دالة الهدف**

يوم عمل في المصنع الأول يكلف 6000 ون.

فإذا كان X_1 يوم عمل في المصنع الأول يكلف $6000 \times X_1$ ون.

نفس الشيء للمصنع الثاني، فمثلا X_2 أيام عمل في المصنع الثاني تكلف $4000 \times X_2$ ون.

[4] - Rathindra P.Sen, « Opeartions Research Algorithms and Applications », Eastern economy edition, New delhi, 2012, p37.

محاضرات بايثون

بما أن الشركة تهدف إلى تخفيض التكاليف، فإن شكل الدالة (Z) تأخذ (Min)، وبالتالي تصبح كالأتي:

$$Min(Z) = 6000X_1 + 4000\ X_2$$

- **تشكيل القيود:** في هذه الحالة لا وجود للقيود الداخلية.

– **القيود الخارجية:** لدينا ثلاثة قيود خارجية خاصة بمنتجات الشركة.

قيد خاص بالمنتج (A):

يوم عمل في المصنع الأول ينتج 6000 قارورة من نوع (A)

فإذا كان X_1 يوم عمل في المصنع الأول فإن الإنتاج يقدر بـ $6000 \times X_1$.

يوم عمل في المصنع الثاني ينتج 2000 قارورة من نوع (A)

فإذا كان X_1 يوم عمل في المصنع الثاني فان الإنتاج يقدر بـ $2000 \times X_1$.

مع العلم ان الطلب المتوقع من هذا المنتج هو 80000 قارورة، وعليه يصبح القيد الأول كالأتي:

$$6000X_1 + 2000X_2 \geq 80000$$

$$3X_1 + X_2 \geq 40 \qquad \text{أو}$$

قيد خاص بالمنتج (B):

نتبع نفس الخطوات من اجل تشكيل القيد الثاني الخاص المنتوج (B)، وعليه نحصل على:

$$1000X_1 + 2500X_2 \geq 22000$$

$$X_1 + 5/2X_2 \geq 22 \qquad \text{أو}$$

قيد خاص بالمنتج (C):

نتبع نفس الخطوات من اجل تشكيل القيد الثاني الخاص المنتوج (C)، وعليه نحصل على:

$$3000X_1 + 3000X_2 \geq 40000$$

$$X_1 + X_2 \geq 40/3 \qquad \text{أو}$$

– **قيود اللاسلبية:**

لا نقبل أيام سالبة، وبالتالي لابد أن تكون (X_1، X_2) على الأقل قيمهما معدومة، ومنه نكتب القيود على الشكل التالي:

$$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0$$

إذن البرنامج الخطي لهذه المسالة هو كالتالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 6000X_1 + 4000\ X_2 \\ 3X_1 + X_2 \geq 40 \\ X_1 + 5/2X_2 \geq 22 \\ X_2 + X_3 \geq 40/3 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0. \end{cases}$$

مصطفى يابس