2.1.صياغة المسألة الثنوية

لنفترض أن لدينا البرنامج الخطي العام للمسالة الأصلية على شكل تعظيم ب (n) متغير و(m) قيد، كما يلي:[1]

$$
\begin{cases}
\mathrm{Max}(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \\
\begin{cases}
a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \le b_1 \\
a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \le b_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \le b_m
\end{cases} \\
X_1, X_2, \ldots, X_n \ge 0
\end{cases}
$$

فإن الصياغة الرياضية لنموذج المسألة الثنوية يكون كالآتي:

$$
\begin{cases}
\mathrm{Min}(W) = b_1Y_1 + b_2Y_2 + \cdots + b_mY_m \\
\begin{cases}
a_{11}Y_1 + a_{21}Y_2 + \cdots + a_{m1}Y_m \ge C_1 \\
a_{12}Y_1 + a_{22}Y_2 + \cdots + a_{m2}Y_m \ge C_2 \\
\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\
a_{1n}Y_1 + a_{2n}Y_2 + \cdots + a_{mn}Y_m \ge C_n
\end{cases} \\
Y_1, Y_2, \ldots, Y_m \ge 0
\end{cases}
$$

نلاحظ أن هناك علاقة بين المسألتين، إذ يعتمدان على نفس المعطيات. كما أن رموز متغيرات النموذج الأصلي (X_j) تم تعديلها لتصبح (Y_i).

3.1.خطوات اشتقاق المسألة الثنوية من المسألة الأصلية

للحصول على المسألة الثنوية انطلاقا من المسألة الأصلية يجب إتباع الخطوات الآتية:[2]

- تعديل دالة الهدف في المسألة الأصلية من تعظيم (Max)، لتصبح تخفيض (Min) في المسألة الثنوية؛
- كل متغير (X_j) في الأصلية (Primal) يوافق قيد في المسألة الثنوية (Dual)، فإذا كان المتغير ($X_j \ge 0$) فإن القيد يكون على شكل أكبر أو يساوي؛
- كل قيد في الأصلية (Primal) يوافق متغير (Y_i) في المسألة الثنوية، فإذا كان القيد أقل أو يساوي فإن المتغير ($y_i \ge 0$)، وإذا كان القيد مساواة فإن المتغير لا يساوي الصفر؛
- قيم الطرف الأيمن من قيود المسألة الأصلية (b_i)، هي معاملات لدالة الهدف (W) في المسألة الثنوية؛
- معاملات دالة الهدف للمسالة الأصلية (C_j) تصبح قيما للطرف الأيمن في قيود المسألة الثنوية؛
- مصفوفة المعاملات في المسألة الثنوية هي عبارة عن منقول مصفوفة المعاملات في المسألة الأصلية (a_{ij})؛ أي تحويل الاعمدة إلى اسطر.

ملاحظة

قبل صياغة المسألة الثنوية لابد من إجراء التحويلات التالية:[3]

---

[1] - Rathindra.P.Sen , Op cit, P103.

[2] - Camille.C.Price & other, « Operations Research A.Practical Introduction », 2nd edition, CRC press, US, 2019, p57.

- إذا كان شكل دالة الهدف تخفيض Min(Z) تحول إلى تعظيم Max(-Z)
- إذا كان القيد اكبر أو يساوي يحول إلى أقل أو يساوي؛
- القيود على شكل معادلات لا تحول.

يمكن تلخيص الخطوات السابقة في الجدول الموالي:

المسألة الأصلية	المسألة الثنوية
دالة الهدف $Max(Z)$ دالة الهدف $Min(Z)$ تحول إلى $Max(-Z)$	دالة الهدف $Min(W)$ دالة الهدف $Min(-w)$
عدد القيود يساوي عدد المتغيرات (X_j) يساوي	عدد المتغيرات (Y_i) عدد القيود
القيد على شكل أقل أو يساوي $(\leq)$ القيد أكبر أو يساوي $(\geq)$ يضرب في (-1) ، أي يصبح أقل أو يساوي القيد على شكل مساواة $(=)$	$Y_i \geq 0$ $Y_i \geq 0$ $Y_i \neq 0$
$X_j \leq 0$ $X_j \geq 0$ $X_j = 0$	القيد أقل أو يساوي $(\leq)$ القيد أكبر أو يساوي $(\geq)$ القيد يساوي $(=)$

نظرا لوجود شرط اللاسلبية في المسألة الأصلية فإن كل القيود في الثنوية تكون على شكل أكبر أو يساوي.

مثال (12):

على ضوء الخطوات السابقة يمكن إيضاح كيفية اشتقاق النموذج الثنائي من الأصلي كما يلي:

المسألة الأصلية

$$Max(Z) = 3X_1 + 2X_2 + 4X_3$$

$$5X_1 + 2X_2 - 1X_3 \leq 25$$

$$2X_1 - 4X_2 + 6X_3 \leq 50$$

$$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0$$

المسألة الثنوية

$$Min(W) = 25Y_1 + 50Y_2$$

$$5Y_1 + 2Y_1 \geq 3$$

$$2Y_1 - 4Y_1 \geq 2$$

$$-1Y_1 + 6Y_1 \geq 4$$

$$Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0$$

3- حمودي حاج صحراوي، مرجع سبق ذكره، ص....

مثال (**13**):

المسالة الثنوية	المسالة الأصلية
$Min(W) = 900Y_1 + 500Y_2 + 50Y_3 + 200Y_3$	$Max(Z) = 300X_1 + 200X_2 + 100X_3$
$2Y_1 + 3Y_2 + 1Y_3 + 0Y_4 \geq 300$	$2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 900$
$1Y_1 + 4Y_2 + 0Y_3 + 1Y_4 \geq 200$	$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 500$
$2Y_1 + 2Y_2 + 0Y_3 + 1Y_4 \geq 100$	$X_1 \leq 50$
$Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \geq 0.Y_4 \neq 0$	$X_2 + X_3 = 200$
	$X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0.$