2. طرق حل مسائل البرمجة الخطية

هناك عدة طرق يتم بواسطتها حل البرامج الخطية منها: طريقة الرسم البياني وطريقة السمبلكس.

1.2. الطريقة البيانية (Graphical Method)

تعد هذه الطريقة من أسهل الطرق المستعملة في حل مسائل البرمجة الخطية، ولا تحتاج إلى خلفية علمية متقدمة في الرياضيات، بل معلومات أساسية عن قواعد حل المعادلات ورسم الدوال، إلا أن استخدامها يقتصر على حالات خاصة لا يزيد عدد المتغيرات عن ثلاثة، وذلك بسبب استحالة التمثيل بالرسم البياني في حالة ازدياد المتغيرات عن ثلاث.[1]

ونظرا لصعوبة التمثيل للمسائل ذات ثلاثة متغيرات، فإننا نقتصر على استخدام هذه الطريقة لحل المسائل ذات متغيرين فقط. وبموجب هذه الطريقة نقوم بتمثيل دالة الهدف والقيود على شكل خط مستقيم في معلم متعامد متجانس، ومن بعد ذلك يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة غير المشطبة). ولحل نموذج البرمجة الخطية ذات متغيرين نتبع الخطوات التالية:

- تحويل القيود (المتراجحات فقط) إلى معادلات؛
- استخراج النقاط المساعدة في عملية رسم كل مستقيم؛
- رسم المعادلات، ثم تشطيب المجالات المرفوضة بناءً على اتجاه المتراجحة؛
- تحديد نقاط تقاطع القيود لمعرفة منطقة الحلول الممكنة (المنطقة غير المشطبة)؛
- تحديد إحداثيات نقاط (زوايا) منطقة الحلول الممكنة، وتعويضها في دالة الهدف؛
- اختيار النقطة التي تعظم أو تقلل دالة الهدف، والتي تمثل إحدى نقاط منطقة الحلول الممكنة.

مثال(3):

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Min(Z) = 3X_1 + 5X_2 \\ \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \le 30 \\ 5X_1 + 4X_2 \le 60 \\ X_1 \ge 5 \end{cases} \\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب: حل المسالة الآتية باستخدام طريقة الرسم البياني؟

---

[1]– مؤيد الحسين الفضل،" المنهج الكمي في اتخاذ القرارات الإدارية المثلى"، دار اليازوري، الأردن، 2010، ص116.

الحل:

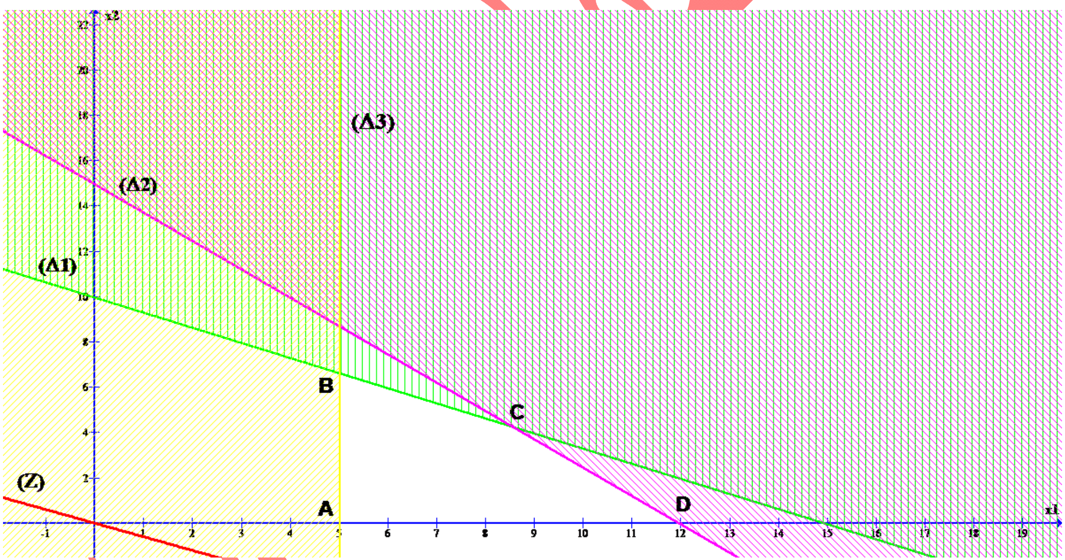
يتم تحويل القيود إلى معادلات وفق الشكل الآتي:

$$\begin{cases} 2\ X_1 + 3\ X_2 = 30 \ldots\ldots\ldots(\Delta 1) \\ 5\ X_1 + 4\ \ X_2 = 60 \ldots\ldots\ldots(\Delta 2) \\ X_1 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 3) \end{cases}$$

ثم نقوم بتحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم، وهي مبينة في الجدول الأتي:

	X_1	X_2
(Δ1)	0	10
	15	0
(Δ2)	0	15
	12	0
(Δ3)	5	0

بعد تحديد النقاط المساعدة في الرسم البياني، نستعين ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم.



من الشكل البياني، يتضح بأن منطقة الحلول المكنة محدودة بالنقاط (A، B، C، D)، إذ أن:

- النقطة (A) إحداثياتها (5، 0)، نعوضها في دالة الهدف نجدها تساوي: Z(A)=3(5)+5(0) =15
- أما النقطة (B) إحداثياتها (4، ؟)، ولإيجاد ترتيبة هذه النقطة نتبع ما يلي:

بالنسبة لهذه النقطة نحصل عليها من تقاطع المستقيمين (Δ1) و(Δ3) أي أن:

$$\begin{cases} 2\ X_1 + 3\ X_2 = 30 \ldots\ldots\ldots(1) \\ X_1 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نحصل على ما يلي:

$X_1 = 5$…………………….(2)

نقوم بتعويض قيمة (X_1) في المعادلة (2) نحصل على:

$2(5) + 3X_2 = 30$………(1)

$X_2 = 20/3$

$B(5, 20/3) \rightarrow Z(B) = 3(5) + 5(20/3) = 145/3$

– النقطة (C) مجهولة الإحداثيات، وبالتالي يجب البحث عن فاصلة وترتيبة هذه النقطة.

بالنسبة لهذه النقطة نحصل عليها من تقاطع المستقيمين ($\Delta1$) و($\Delta2$) أي أن:

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 = 30 \ldots\ldots\ldots(1) \\ 5X_1 + 4X_2 = 60 \ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

من المعادلة (1) نحصل على ما يلي:

$X_1 = -3/2\, X_2 + 15$………(3)

نقوم بتعويض قيمة (X_1) في المعادلة (2)، نحصل على:

$5(-3/2\, X_2 + 15) + 4X_2 = 60$………(2)

$X_2 = 30/7$

نقوم بتعويض قيمة (X_2) في المعادلة (3)، فنحصل على:

$X_1 = 120/14$

$C(120/14, 30/7) \rightarrow Z(C) = 3(120/14) + 5(30/7) = 660/14$

– النقطة (D) إحداثياتها (12، 0) نعوضها في دالة الهدف فنجدها تساوي:

$Z(D) = 3(12) + 5(0) = 36$

بما أن دالة الهدف هي من الشكل (Min)، فإن الحل الأمثل[*] هو النقطة $A(5,0)$، أي أن:

$X_1 = 5,\ X_2 = 0,\ Min(Z) = 15$

ملاحظة:

في حالة كون عدد نقاط (زوايا) منطقة الحلول الممكنة كثير، نلجأ إلى رسم مستقيم معادلة دالة الهدف، ونزيحها نحو الأعلى فإذا كانت دالة الهدف تعظيم، فإن آخر نقطة يمسها مستقيم (Z) تكون هي الحل الأمثل، أما إذا كانت مسالة تخفيض، فإن أول نقطة يمسها مستقيم دالة الهدف تعتبر حلا أمثلا.

[*] – **الحل الأمثل**: هو الحل المقبول (أي الحل الذي يحقق كافة القيود)، فضلا عن جعله قيمة الهدف في نهايتها العظمى أو الصغرى.

مثال(4):[2]

تنتج شركة الواحة الصناعية نوعان من الدهانات (A) و(B)، وذلك باستخدام نوعين من المواد الخام (M1) و (M2) ويصور الجدول التالي البيانات الأساسية الخاصة بالمشكلة:

	الدهان (A)	الدهان (B)	الطاقة المتاحة في اليوم (طن)
المادة الخام (M1)	6	4	24
المادة الخام (M2)	1	2	6
الربح لكل طن (ون)	5	4	

تشير دراسة السوق إلى أن الطلب اليومي على الدهان (B) لا يمكن أن يتجاوز الطلب على الدهان (A) بأكثر من طن واحد، كما أن أقصى كمية للطلب اليومي من الدهان (B) تبلغ 2 طن. وترغب الشركة في تحديد المزيج الأمثل من المنتجات (A) و(B)، والذي يؤدي إلى تعظيم الربح الإجمالي اليومي للشركة.

الحل:

متغيرات القرار

X_1: عدد الأطنان التي يتم إنتاجها يوميا من الدهانات (A)؛

X_2: عدد الأطنان التي يتم إنتاجها يوميا من الدهانات (B).

البرنامج الخطي لهذه المسالة هو كالتالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 5X_1 + 4X_2 \\ \begin{cases} 6X_1 + 4X_2 \leq 24 \\ X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ X_2 - X_1 \leq 1 \end{cases} \\ X_2 \leq 2 \\ X_1 \geq 0 \text{ , } X_2 \geq 0 \end{cases}$$

لرسم البرنامج الخطي المتحصل يتوجب إتباع الخطوات التالية:

- تحويل القيود إلى معادلات وفق ما يلي:

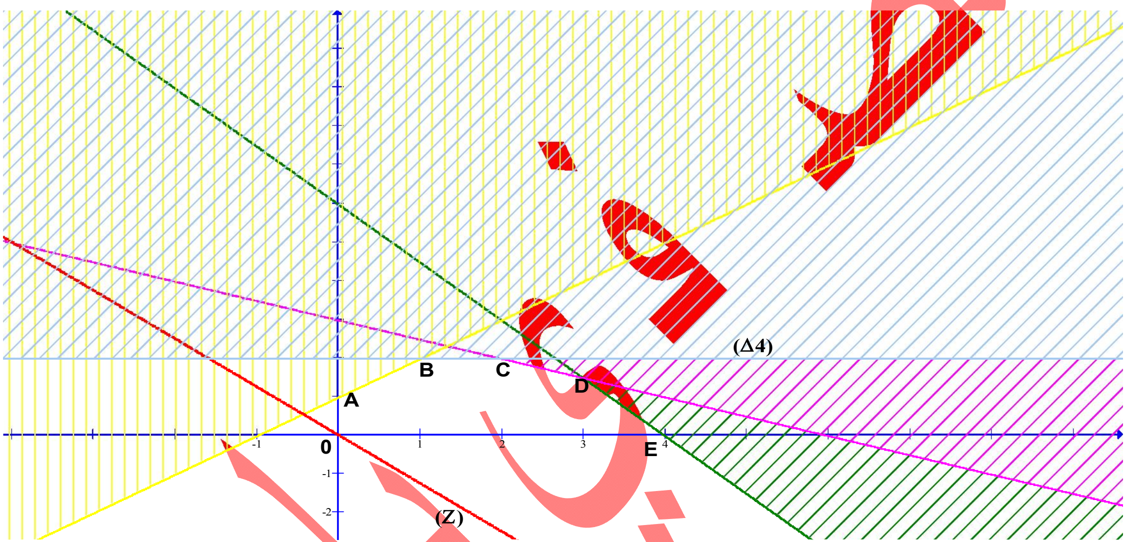
$$\begin{cases} 6X_1 + 4X_2 = 24 \ldots\ldots\ldots (\Delta 1) \\ X_1 + 2X_2 = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta 2) \\ X_1 - X_2 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta 3) \\ X_2 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta 4) \end{cases}$$

[2]– علاء محمد البتانوني،"بحوث العمليات ودورها في اتخاذ القرارات"، دار التعليم، مصر،2016، ص244.

– تحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم، وهي مدونة في الجدول الموالي:

	X_1	X_2
(Δ1)	0	6
	4	0
(Δ2)	0	3
	6	0
(Δ3)	0	1
	-1	0
(Δ4)	0	2

– الرسم البياني: بعد تحديد النقاط المساعدة، نستعين ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم.



إن المساحة المتمثلة بالشكل سداسي الأضلاع (A، B، C، D، E،O)، والتي تحددت أسفل المستقيات التي تمثل القيود، تمثل منطقة الحلول الممكنة، إن النقاط التي تمثل رؤوس الزوايا في الشكل السداسي تمثل حلول للبرنامج الخطي، والحل الأمثل هو أحدها. لذا وجب تحديد إحداثيات كل نقطة وتعويضها في دالة الهدف.

– **النقطة (A)** إحداثياتها (0، 1)، نعوضها في دالة الهدف نجدها تساوي: $Z(A)=5(0)+4(1)=4$

– **النقطة (B)** إحداثياتها (؟، 2)، ولإيجاد فاصلة هذه النقطة نتبع ما يلي:

بالنسبة لهذه النقطة نحصل عليها من تقاطع المستقيمين (Δ3) و(Δ4) أي أن:

$$\begin{cases} X_2 - X_1 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1) \\ X_2 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

نقوم بتعويض قيمة (X_2) في المعادلة (1)، فنحصل على:

$$X_1 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$B(1\ ,2) \rightarrow Z(B)=5(1)+4(2)=13$

– **النقطة (C)** إحداثياتها (؟، 2)، بالتالي يجب البحث عن فاصلة هذه النقطة.

بالنسبة لهذه النقطة نحصل على إحداثياتها من تقاطع المستقيمين (Δ2) و(Δ4)، أي:

$$\begin{cases} X_2 + 2X_1 = 6\ldots\ldots\ldots(1) \\ X_2 = 2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

نقوم بتعويض قيمة (X_2) في المعادلة (1)، نحصل على:

$X_1 = 2\ldots\ldots\ldots(1)$

$C(2\ ,2) \rightarrow Z(C)=5(2)+4(2)=18$

– **النقطة (D)** مجهولة الإحداثيات وهي تنتمي إلى تقاطع المستقيمين (Δ1) و(Δ2) أي أن:

$$\begin{cases} 6\ X_1 + 4\ X_2 = 24\ldots\ldots\ldots(1) \\ X_1 + 2X_2 = 6\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) في 2 ونطرح المعادلة الأولى من الثانية، فنحصل على ما يلي:

$X_1 = 3\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

نقوم بتعويض قيمة (X_1) في المعادلة (2) نحصل على:

$X_2 = 3/2$

$C(3\ ,3/2) \rightarrow Z(C)=3(3)+5(3/2)=21$

– **النقطة (E)** إحداثياتها (4، 0) نعوضها في دالة الهدف فنجدها تساوي:

$Z(D)=5(4)+4(0)=20$

بما أن دالة الهدف هي من الشكل (Max)، فإن الحل الأمثل هو النقطة $D(3,\ 3/2)$، أي أن:

$X_1 = 3,\ X_2 = 3/2,\ Max(Z)=21$