2.2. طريقة السمبلكس (Simplex Method)

تناولنا فيما سبق الطريقة البيانية في حل مشكلة البرمجة الخطية، ولكن هناك قصورا واضحا في هذه الطريقة لكونها لا تستخدم إلا في حالة وجود متغيرين أو أقل، ولمعالجة ذلك طور العالم الأمريكي "جورج دانتزيغ" (Dantzig) طريقة تسمى "**بالسمبلكس**"، والتي تبنى على مجموعة من الخطوات تؤدي إلى الوصول للحل الأمثل.[1] ومع ظهور البرمجيات الحاسوبية عرفت هذه الطريقة استخداما واسعا ونجاحا كبيرا في معالجة المشاكل الكبيرة والمعقدة، ومن بينها: (Tora, Storm, Lindo, Lingo, QM, WinQnsb,).

1.2.2. طريقة السمبلكس العادية (حالة تعظيم)

في هذا النوع من السمبلكس، يشترط أن تكون دالة الهدف على شكل (Max)، وكل القيود أقل أو يساوي، كما أن الطرف الأيمن من القيود يكون موجبا، وفي حالة تحقق هذه الشروط مجتمعة نكون في سمبلاكس عادي. وحتى نتمكن من استعمال هذه الطريقة يمكن إتباع المراحل التالية:

أ.**المرحلة الأولى**: تكوين النموذج القياسي أو المعياري (Standard Model)، حيث يتم تحويل النموذج الأصلي لمشكلة البرمجة الخطية (المسالة الأصلية Primal) إلى النموذج القياسي، وتتلخص هذه الخطوة فيما يلي:

- صياغة المسالة الأصلية (تكوين البرنامج الخطي)؛
- نقل المجاهيل (المتغيرات) في دالة الهدف من الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر، أي تصبح معادلة صفرية؛
- إذا كانت إشارة القيد أقل أو يساوي، يتم إضافة مكمل (متغير) إلى الجانب الأيسر للقيد، ويسمى بمتغير الفرق (Slack)،[*] ونرمز له بالرمز (Si)، حيث يظهر هذا المتغير بمعامل 0 في دالة الهدف.[2]

وعليه فإذا كان الشكل العام للبرنامج الخطي لدالة الهدف (Max) قانوني[**] معطى بالشكل الآتي:

$$\begin{cases} Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \\ \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \le b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \le b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \le b_m \end{cases} \\ X_1, X_2, \dots, X_n \ge 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Max\ Z = \sum C_j Xj \\ \sum A_{ij}\ Xj \le b_i \\ X_j \ge 0 \end{cases}$$

---

[1]- السعدي رجال،"بحوث العمليات البرمجة الخطية"، دار رحزو، الجزائر، 2004، ص76

[*]- في حالة القيد الداخلي يسمى بمتغير الطاقة العاطلة، أما إذا كان القيد خارجي يسمى بمتغير الفرق.

[2]- محمد الفاتح محمود، بشير المغربي،" بحوث العمليات في المحاسبة"، الاكاديمية الحديثة للكتاب الجامعي،مصر، 2018، ص ص 45-46.

[**]- يعني شكل الدالة (Max) وكل القيود اقل أو يساوي، مع الطرف الأيمن من القيود موجب.

فإن الصيغة القياسية لهذا البرنامج نحصل عليها بإضافة متغيرات الفجوة (الطاقة العاطلة)(S_i) إلى الطرف الأيسر من القيود لتتحول بذلك إلى معادلات، وفق ما يلي:

$$\begin{cases} (Z) - C_1X_1 - C_2X_2 - \cdots - C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \cdots + 0S_m = 0 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + 1S_1 + 0S_2 + \cdots + 0S_m = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + 0S_1 + 1S_2 + \cdots + 0S_m = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n + 0S_1 + 0S_2 + \cdots + 1S_m = b_m \\ S_1, S_2, \ldots, S_m \geq 0; X_1, X_2, \ldots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

بهذه الصورة نكون قد تحصلنا على الشكل المعياري للبرنامج الخطي، أما بالنسبة للمتغيرات الجديدة (S_i) تعتبر متغيرات أساسية في المرحلة الموالية (إنشاء جدول الحل الأساسي)، وتتميز عن باقي المتغيرات بما يلي:

- تظهر مرة واحدة في كل معادلة؛
- معاملها (+1) في حالة القيد أقل أو يساوي، لأن الطرف الأيسر أقل من الطرق الأيمن، لذا وجب إضافة كمية قدرها (S_i)؛
- تشكل هذه المتغيرات أساس الجدول في حالة إشارتها موجبة، وقيمها في الجدول الأساسي هي قيم الطرف الأيمن من القيود (تمثل قيمة الموارد المتاحة مادام لم ينطلق النشاط).[3]

ب.المرحلة الثانية: إيجاد جدول الحل الأساسي (Initial) للحصول على حل أولي ممكن، والذي يناظر الحل الأولي عند نقطة الأصل في طريقة الرسم البياني. يتم التوصل إليه بفرض قيم كل متغير من المتغيرات الأصلية (X_j) في المشكلة المدروسة مساوية للصفر، وهو حل مقبول رياضيا ومرفوض اقتصاديا.[4]

بصفة عامة يتم إدراج مصفوفة الأحادية في جدول الحل الأساسي(الجدول الموسع)، إلا أنه سيتم إهمال مصفوفة الأحادية (هذه المصفوفة لا تأثير لها في عمليات الضرب عند الانتقال من جدول إلى آخر) في هذا الجدول، وبالتالي نحصل على الجدول المختصر كما يلي:

الجدول الأول		متغيرات خارج الأساس				قيمة الطرف الأيمن من القيود
		X_1	X_2	...	X_n	
متغيرات أساسية	S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
	S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
	S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
(Z)		$-C_1$	$-C_2$	...	$-C_n$	0

[3]- حاج صحراوي حمودي،"رياضيات المؤسسة كمدخل للتقنيات الكمية"، دار النشر جيطلي، الجزائر، 2014، ص75

[4]- دلال صادق الجواد، حميد ناصر الفتال،"بحوث العمليات"، اليازوري، الاردن، 2008، ص149.

نلاحظ في جدول الحل الأساسي أن هناك نوعين من المتغيرات، متغيرات الفرق (S_i) تكون داخل الأساس، وقيمها عند بداية الحل هي قيم العمود الأخير(b_i)، بينما متغيرات القرار (X_j) تكون خارج الأساس وقيمها معدومة، وعليه دالة الهدف كذلك مساوية للصفر.

ج.**المرحلة الثالثة**: تحسين الحل الأساسي إلى حين بلوغ الحل الأمثل (تحسين قيمة دالة الهدف) وفق الخطوات التالية:

- **تحديد المتغير الداخل**: هو الموافق لأكبر قيمة بالقيمة المطلقة في سطر دالة الهدف (Z). ويسمى العمود الذي تنتمي إليه المتغيرة التي تدخل إلى الأساس **بعمود الارتكاز**؛
- **تحديد المتغير الخارج**: نحصل عليه بقسمة العمود الأخير (قيم الطرف الأيمن من القيود) على ما يقابلها من قيم عمود الارتكاز، والمتغير الذي يقابل أقل حاصل قسمة موجب يعد هو المتغير الذي يخرج من الأساس، ويسمى هذا السطر **بسطر الارتكاز**؛
- **تحديد عنصر الارتكاز**: العنصر الناتج من تقاطع عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز يسمى بعنصر الارتكاز (Pivot).

إن استخلاص الجدول الموالي يكون وفق ما يلي:

- استبدال المتغير الذي سيخرج من الأساس بالمتغير الذي ستدخل إلى الأساس؛
- يتم استبدال عنصر الارتكاز بمقلوبه؛
- باقي عناصر سطر الارتكاز تقسم على موجب عنصر الارتكاز؛
- باقي عناصر عمود الارتكاز تقسم على سالب عنصر الارتكاز؛
- أما العناصر المتبقية فهي تحسب وفق المعادلة التالية:

العنصر الجديد = العنصر القديم – (المقابل له في سطر الارتكاز* المقابل له في عمود الارتكاز) / عنصر الارتكاز

يمكن الحصول على الحل الأمثل (Optimal Solution) لمشكلة التعظيم، وذلك عندما تكون جميع عناصر سطر دالة الهدف موجبة أو معدومة. أما في حالة وجود عناصر سالبة، فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل.[5]

مثال (5):

ليكن لديك البرنامج الخطي لشركة مختصة في صناعة ثلاثة أنواع من الطاولات.

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 50X_1 + 40X_2 + 35X_3 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 \le 1000 \quad \text{قيد الحديد (متر)} \end{cases}$$

[5]– حاج صحراوي حمودي حاج صحراوي ، مرجع سبق ذكره، ص..

$X_1 + X_3 \leq 2000$ قيد الخشب (متر)

$X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 800$ قيد ساعات العمل (ساعة)

$X_1, X_2, X_3 \geq 0$

المطلوب: حل المسألة الآتية بطريقة السمبلكس المناسبة؟

الحل:

نقوم بتكوين الشكل القياسي انطلاقا من البرنامج الخطي للمسالة، وذلك بإضافة متغير الطاقة العاطلة على النحو الآتي:

$$Z - 50X_1 - 40X_2 - 35X_3 = 0$$
$$2X_1 + X_2 + X_3 + S_1 = 1000$$
$$X_1 + X_3 + S_2 = 2000$$
$$X_1 + 2X_2 + X_3 + S_3 = 800$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

بعد ذلك نحصل على جدول الحل الأساسي كما يلي:

T1	X_1	X_2	X_3	b_i	النسبة
S_1	2	1	1	1000	500
S_2	1	0	1	2000	2000
S_3	1	2	1	800	800
Z	-50	-40	-35	0	

T2	S_1	X_2	X_3	
X_1	1/2	1/2	1/2	500
S_2	-1/2	-1/2	1/2	1500
S_3	-1/2	3/2	1/2	300
Z	25	-15	-10	25000

بالنسبة لجدول الحل الأساسي (T1)، فإن المتغير الداخل هو (X_1)، كونه يقابل أكبر قيمة بالقيمة المطلقة (أكبر عائد لدالة الهدف) في سطر دالة الهدف (Z)، ويسمى بعمود الارتكاز. أما المتغير الخارج هو (S_1) كونه يقابل أقل حاصل قسمة موجب (قسمة قيم العمود الأخير على عناصر عمود الارتكاز)، ويسمى سطر (S_1) بسطر الارتكاز. بينما تقاطع سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز يعطي عنصر الارتكاز، وهو (2).

للحصول على الجدول الثاني (T2) يجب إتباع خطوات تحسين الحل المذكورة سابقا، وهي:

- في مكان عنصر الارتكاز يصبح مقلوب عنصر الارتكاز، أي نحصل على (1/2)؛
- بقية عناصر سطر الارتكاز تقسم على عنصر الارتكاز، فنحصل على (1/2، 1/2، 500) بالترتيب؛
- بقية عناصر عمود الارتكاز تقسم على سالب عنصر الارتكاز، أي نحصل على(-1/2، -1/2، 25)؛
- العناصر المتبقية في الجدول تحسب بالقاعدة المذكورة سابقا.

نلاحظ من الجدول (T2) أن دالة الهدف ارتفعت إلى حدود 25000ون، وهذا راجع لإنتاج 500 طاولة من النوع الأول. إلا أن التمعن في السطر الأخير بجدول السمبلكس لهذا الحل يبين وجود قيم سالبة في سطر دالة الهدف، مما يعني أن هناك حلا آخر أفضل من هذا الحل، ويعطي ربحا إضافيا في حالة الانتقال إليه (أي الحل المتحصل عليه ليس حلا امثلا)، وبالتالي فهو قابل للتحسين. بنفس الخطوات المطبقة في الجدول الأول، حيث نختار عمود الارتكاز ثم سطر الارتكاز في الجدول الثاني للمرور إلى الجدول الثالث.

T3	S_1	S_3	X_3	
X_1	2/3	-1/3	1/3	400
S_2	-2/3	1/3	2/3	1600
X_2	-1/3	2/3	1/3	200
Z	20	10	-5	28000

T4	S_1	S_3	X_2	
X_1	1	-1	-1	200
S_2	0	-1	-2	1200
X_3	-1	2	3	600
Z	15	20	15	31000

من خلال الجدول الثالث يتبين أنه ليس حلا امثلا، لذا فهو قابل كذلك للتحسين، وبالتالي نختار سطر الارتكاز وعمود الارتكاز ونكمل الخطوات الأخرى. أما بالنسبة للجدول الرابع، فنلاحظ أن جميع قيم سطر دالة الهدف غير سالبة، وعليه يكون هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل، وبالتالي الحل الأمثل لهذه المسالة هو:

$X_1=200, X_2=0, X_3=600, S_1=0, S_2=1200, S_3=0, Z=31000.$

يتضح من هذه النتائج أن إدارة الشركة ستتخذ قرارا بإنتاج 200 طاولة من النوع الأول، و600 طاولة من النوع الثالث، وعدم إنتاج النوع الثاني، لتحقيق أعظم ربح قدره 31000 ون، مع بقاء طاقة عاطلة في القيد الثاني قدرها 1200 متر من الخشب.

مصطفاي ياسين