4.1.طرق حل المسألة الثنوية

لحل المسألة الثنوية يمكننا استعمال خمسة طرق، وهي: طريقة التكامل بين متغيرات المسألة الأصلية والمسألة الثنوية، طريقة الاستنتاج(الحل من الجدول الأمثل للمسالة الأصلية)، طريقة السمبلاكس الخاصة بالمسألة الثنوية، وطريقة اعتبار المسألة الثنوية كمسالة أصلية يتم حلها بالسمبلاكس على مرحلتين، بالإضافة إلى طريقة الرسم البياني(في حالة وجود متغيرين).

1.4.1.طريقة التكامل بين متغيرات المسألة الأصلية والمسألة الثنوية:

هذه الطريقة تعتمد على العلاقات التي تربط بين المسالتين وبالتالي يمكن استنتاج علاقات بين المتغيرات كما يلي:

المسالة الأصلية

$$Max(Z) = \sum C_j X_j$$
$$\sum a_{ij} X_j \leq b_i$$
$$\sum a_{ij} X_j + S_i = b_i$$
$X_i \geq 0, S_i \geq 0$

المسالة الثنوية

$$Min(W) = \sum b_i Y_i$$
$$\sum a_{ij} Y_i \geq C_j$$
$$\sum a_{ij} Y_i - t_j = C_j$$
$Y_i \geq 0, t_j \geq 0$

عند الحل الأمثل نجد أن:

$$(Z) = (W) \Leftrightarrow \sum C_j X_j = \sum b_i Y_i$$

وبتعويض (C_j) و(b_i) بما ويساويهما يصبح لدينا:

$$\sum (\sum a_{ij} Y_i - t_j) X_j = \sum (\sum a_{ij} X_j + S_i) Y_i$$
$$\Rightarrow - \sum t_j X_j = \sum S_i Y_i$$
$$\Rightarrow \sum t_j X_j + \sum S_i Y_i = 0$$

بما أن كل من $(S_i، X_j، Y_i، t_j)$ أكبر من أو تساوي الصفر، فإن:

$$\sum t_j X_j = 0 \; ; \sum S_i Y_i = 0$$

أي معناه:

$$\sum S_i Y_i = 0 \quad \begin{cases} S_i = 0 \Rightarrow Y_i > 0 \\ S_i > 0 \Rightarrow Y_i = 0 \end{cases}$$
$$\sum t_j X_j = 0 \quad \begin{cases} X_j = 0 \Rightarrow t_j > 0 \\ X_j > 0 \Rightarrow t_j = 0 \end{cases}$$

من خلال ما سبق يمكننا إيجاد قيم $(Y_i، t_j)$ من خلال الحل الأمثل للمسالة الأصلية إن وجدت قيم $(S_i، X_j)$.

ملاحظة

لا يمكن استعمال هذه الطريقة في حالة وجود حلول مثلى بديلة أو حالة عدم الانتظام (حالة التحلل).

مثال (14):ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{gathered}\text{Max}(Z) = 4X_1 +3X_2+2X_3\\ 2X_1 +X_2 + 2X_3\leq 10\\ X_1 +X_2 + X_3\geq 6\\ X_1+X_2 +2X_3 = 8\\ X_1, X_2, X_3\geq 0.\end{gathered}$$

إذا علمت أن الحل الأمثل لهذه المسألة هو: $(X_1=2, X_2=6 , X_3=0)$

المطلوب: أوجد حلول المسألة الثنوية؟.

الحل:

- يجب إيجاد قيم $(S_1، S_2، a_3)$ من الشكل القياسي للبرنامج الأصلي، وفق ما يلي:

$$\begin{gathered}\text{Max}(Z) = 4X_1 +3X_2+2X_3\\ 2X_1 +X_2 + 2X_3+ S_1= 10\\ -X_1 -X_2- X_3+ S_2= - 6\\ X_1+X_2 +2X_3 + a_3= 8\\ X_1, X_2, X_3\geq 0, S_1, S_2\geq 0, a_3=0.\end{gathered}$$

بتعويض قيم $(X_1=2, X_2=6 , X_3=0)$ في معادلات الشكل القياسي نحصل على ما يلي:

$$S_1 =0, S_2=2, a_3=0.$$

وباستغلال العلاقة التي بين متغيرات المسألة الأصلية والمسألة الثنوية نحصل على:

$$t_1 =0, t_2=0, t_3= ?, Y_1 = ?, Y_2=0, Y_3= ?.$$

- بعد إيجاد كل قيم متغيرات المسألة الأصلية نمر إلى صياغة المسألة الثنوية:

$$\begin{gathered}\text{Min}(W) = 10Y_1 -6Y_2+8Y_3\\ 2Y_1 -Y_2 + Y_3\geq 4\\ Y_1 -Y_2 + Y_3 \geq 3\\ 2Y_1-Y_2 +2Y_3 \geq 2\\ Y_1 \geq 0, Y_2\geq 0, Y_3\neq 0.\end{gathered}$$

الشكل القياسي للمسالة الثنوية:

$$\begin{gathered}2Y_1 -Y_2 + Y_3 - t_1= 4\\ Y_1 -Y_2 + Y_3 -t_2= 3\\ 2Y_1-Y_2 +2Y_3 - t_3= 2\\ Y_1 \geq 0, Y_2\geq 0, Y_3\neq 0, t_1 \geq 0, t_2\geq 0, t_3\geq 0.\end{gathered}$$

بما أن $(t_1=0, Y_2=0 , t_2=0)$، فإن المعادلات تصبح كالآتي:

$2Y_1 + Y_3 = 4$.....(1)
$Y_1 + Y_3 = 3$.....(2)
$2Y_1 + 2Y_3 - t_3 = 2$.....(3)

بطرح المعادلة الأولى من الثانية نجد أن: $(Y_1=1)$

وبتعويض قيمة $(Y_1=1)$ في المعادلة الثانية نحصل على $(Y_3=2)$

كذلك بتعويض كل من $(Y_1، Y_2)$ في المعادلة الثالثة نجد أن قيمة $(t_3=4)$

وعليه تصبح حلول المسألة الثنوية هي: **$Y_1=1, Y_2=0, Y_3=2, t_1=0, t_2=0, t_3=4, W=26$.**

2.4.1.طريقة الاستنتاج

يمكن استعمال هذه الطريقة في حالة وجود جدول الحل الأمثل للمسالة الأصلية، وباستغلال العلاقات التناظرية بين المتغيرات المسألة الأصلية ومتغيرات المسألة الثنوية يمكننا الحصول على جدول الحل الأمثل للمسألة الأصلية.

مثال (15):

ليكن لديك جدول الحل الأمثل الآتي:

Op T	a_1	S_3		
X_1	1/3	-1/3	8	$t_1=0$
S_2	-7/3	-2/3	6	$Y_2=0$
X_2	2/3	1/3	2	$t_2=0$
(Z)	14/3	1/3	42	W
	Y_1	Y_3		

نستنتج من جدول الحل الأمثل للمسالة الأصلية ما يلي:

متغيرات المسألة الأصلية	متغيرات المسألة الثنوية
$X_1 = 8$	$t_1 = 0$
$X_2 = 2$	$t_2 = 0$
$S_2 = 6$	$Y_2 = 0$
$S_3 = 0$	$Y_3 = 1/3$
$a_1 = 0$	$Y_1 = 14/3$
$Z = 42$	$W = 42$

3.4.1.طريقة السمبلاكس الخاصة بالثنوية

تعمل طريقة السمبلاكس للمسالة الثنوية بأسلوب مشابه لطريقة السمبلاكس الخاصة بالمسألة الأصلية، إلا أن القواعد التي يتم بموجبها اختيار عمود الارتكاز(المتغير الداخل) وسطر الارتكاز(المتغير الخارج) وشرط الأمثلية بالنسبة لطريقة السمبلاكس الثنوية تصبح كما يلي:

- تحويل أي قيد على شكل أكبر أو يساوي إلى قيد أقل أو يساوي (عدى قيود اللاسلبية)، ونضيف متغيرات الفرق التي نرمز لها بالرمز (t)؛
- تحديد المتغير الخارج أولا، وذلك بأخذ أكبر قيمة بالقيمة المطلقة في العمود الأخير، وبالتالي نحصل على سطر الارتكاز؛
- تحديد المتغير الداخل إلى الأساس، وذلك بقسمة قيم سطر دالة الهدف (-W) على مقابلاتها في سطر الارتكاز، ونختار العمود الذي يعطينا أقل قيمة بالقيمة المطلقة، وبالتالي نحصل على عمود الارتكاز؛
- تقاطع سطر الارتكاز مع عمود يعطي عنصر الارتكاز؛
- نحصل على جدول الحل الأمثل للمسألة الثنوية إذا كان العمود الأخير غير سالب.

ولتوضيح ذلك نستعين بالمثال الموالي.

مثال (16):

$$\begin{cases} Max(Z) = 4X_1 + 3X_2 + X_3 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 \leq 28 \\ X_1 + X_2 + X_3 \leq 21 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 29 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0. \end{cases}$$

الشكل الثنوي للبرنامج الخطي:

$$\begin{cases} Min(W) = 28Y_1 + 21Y_2 + 29Y_3 \\ 2Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 4 \\ Y_1 + Y_2 + 2Y_3 \geq 3 \\ Y_1 + Y_2 + Y_3 \geq 1 \\ Y_1 \geq 0,\ Y_2 \geq 0,\ Y_3 \geq 0. \end{cases}$$

نلاحظ أن القيود على شكل أكبر أو يساوي، لذا وجب ضربها في (-1) لتتحول إلى قيود على صورة أقل أو يساوي، ومن ثم نضيف متغير جديد للطرف الأيسر من القيد يسمى **بتكلفة الفرصة البديلة**، حيث نرمز له بالرمز (t)، إضافة إلى ذلك يتم تحويل الدالة من الشكل (Min(W)) إلى الشكل (Max(-W))، وبالتالي يصبح الشكل القياسي للمسالة الثنوية:

$$\begin{aligned} Max(-W) &= -28Y_1 - 21Y_2 - 29Y_3 \\ -2Y_1 - Y_2 - Y_3 + t_1 &= -4 \\ -Y_1 - Y_2 - 2Y_3 + t_2 &= -3 \\ -Y_1 - Y_2 - Y_3 + t_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0.\ t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

جداول السمبلاكس

T1	X_1	X_2	X_3	b_i
S_1	2	1	1	28
S_2	1	1	1	21
S_3	1	2	1	29
Z	-4	-3	-1	0

T1	Y_1	Y_2	Y_3	
t_1	-2	-1	-1	-4 نختار السطر أولا
t_2	-1	-1	-2	-3
t_3	-1	-1	-1	-1
-W	28	21	29	0

نلاحظ من جدول الحل الأساسي (T1) للمسالة الثنوية خروج (t_1)، أي دخول (X_1) في الأصلية، بينما المتغير الداخل إلى منطقة الأساس هو (Y_1)، أي خروج المتغير (S_1).

T2	S_1	X_2	X_3	b_i	النسبة
X_1	1/2	1/2	1/2	14	28
S_2	-1/2	1/2	1/2	7	14
S_3	-1/2	3/2	1/2	15	10
Z	2	-1	1	56	

T2	t_1	Y_2	Y_3	
Y_1	-1/2	1/2	1/2	2
t_2	-1/2	-1/2	-3/2	-1
t_3	-1/2	-1/2	-1/2	1
-W	14	7	15	-56

T3	S_1	S_3	X_3	b_i
X_1	2/3	-1/3	1/3	9
S_2	-1/3	-1/3	1/3	2
X_2	-1/3	2/3	1/3	10
Z	5/3	2/3	4/3	66

T3	t_1	Y_2	t_2	
Y_1	-2/3	1/3	1/3	5/3
Y_3	1/3	1/3	-2/3	2/3
t_3	-1/3	-1/3	-1/3	4/3
-W	9	7	10	-66

بما أن العمود الأخير من الجدول الثالث للمسالة الثنوية موجب فإنه يعتبر حل أمثلا، وعليه يكون الحل كما يلي:

$Y_1 = 5/3, Y_2 = 0, Y_3 = 2/3. t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 4/3, W = 66.$

نلاحظ أن جدول الحل الأمثل للمسالة الثنوية هو عبارة عن مقلوب جدول الحل الأمثل للمسالة الأصلية (كل سطر يصبح عمود)، مع استبدال (Y_i) بالمتغير (S_i) ، وكذا استبدال المتغير (t_j) بالمتغير (X_j)، مع ضرب ما بداخل الجدول (المصفوفة) في (-1).

4.4.1. طريقة السمبلكس على مرحلتين

في هذه الحالة يتم اعتبار المسألة الثنوية كمسألة أصلية، ومنه يمكن حلها بطريقة السمبلكس على مرحلتين أو السملكس بإدخال متغير وهمي.

لنطبق طريقة السمبلكس على مرحلتين على المثال السابق ونقارن النتائج:

الحل:

الشكل القياسي للمسالة الثنوية:

$$\text{Max}(-W) = -28Y_1 - 21Y_2 - 29Y_3$$
$$-2Y_1 - Y_2 - Y_3 + t_1 = -4$$
$$-Y_1 - Y_2 - 2Y_3 + t_2 = -3$$
$$-Y_1 - Y_2 - Y_3 + t_3 = -1$$
$$Y_1, Y_2, Y_3 \geq 0.\ t_1, t_2, t_3 \geq 0$$

جداول السمبلاكس

	(0)	(0)	(0)			(-28)	(-21)		
T1	Y_1	Y_2	Y_3	C_i	**T2**	Y_1	Y_2	t_1	
$(1)t_1$	-2	-1	-1	-4	$(-29)Y_3$	2	1	-1	4
$(1)t_2$	-1	-1	-2	-2	t_2	3	1	-2	5
$(1)t_3$	-1	-1	-1	-1	t_3	1	0	-1	3
$-W^1$	-4	-3	-4	x	-W	-30	-8	29	-116

نختار من جدول الحل الأساسي (T1) أكبر قيمة بالقيمة المطلقة في سطر دالة الهدف، ثم نختار أكبر حاصل قسمة موجب (لأن العناصر المرشحة للعب دور عنصر الارتكاز سالبة وحاصل قسمة كل عناصر العمود الأخير على عمود الارتكاز موجبة)، وبالتالي خروج (t_1) من الأساس، ودخول (Y_3) إلى منطقة الأساس. أما في الجدول الثاني فيكون العمود الأول هو عمود الارتكاز فحين السطر الثاني هو سطر الارتكاز(اختيار أقل حاصل قسمة عناصر العمود الأخير على عناصر عمود الارتكاز).

T3	t_2	Y_2	t_1	
Y_3	-2/3	1/3	1/3	2/3
Y_1	1/3	1/3	-2/3	5/3
t_3	-1/3	-1/3	-1/3	4/3
-W	10	2	9	-66

بما أن سطر دالة الهدف في الجدول الثالث للمسالة الثنوية موجب فإنه يعتبر حلا أمثلا، وعليه يكون الحل كما يلي:

$Y_1 = 5/3, Y_2 = 0, Y_3 = 2/3.\ t_1 = 0, t_2 = 0, t_3 = 4/3, W = 66.$