جامعة فرحات عباس - سطيف01 –

كلية العلوم الاقتصادية والتجارية وعلوم التسيير

قسم علوم التسيير

محاضرات وتطبيقات في مقياس رياضيات المؤسسة

موجهة لطلبة السنة الثانية علوم التسيير

	c_j	1	5	0	0	-M	
C_B	Basic variables B	x_1	x_2	x_3	x_4	A_1	Solution values $b\ (= X_B)$
0	x_3	3	4	1	0	0	6
-M	A_1	1	3	0	-1	1	2
z_j-c_j		-M-1	-3M-5	0	M	0	

من إعداد: د. مصطفاي ياسين

2020/2019

مقدمة

تهدف هذه المطبوعة من خلال أجزائها الثلاثة إلى تعريف الطالب ببعض المفاهيم الأساسية حول مقياس رياضيات المؤسسة، وتطوير قدراته في تطبيق الأسس النظرية والتطبيقية للأساليب الكمية اللازمة لاتخاذ القرارات المناسبة لمختلف المشكلات الاقتصادية، حيث تستعرض هذه المطبوعة مجموعة من المحاضرات تتوزع على ثلاثة أجزاء، ففي جزئها الأول يتناول البرمجة الخطية انطلاقا من صياغة النموذج الخطي للمسالة وصولا إلى طرق حله، كما يتناول كذلك هذا الجزء محاضرات حول المسالة الثنوية وطرق حلها، وكذا تحليل الحساسية التي تهتم بتغّير بعض المعطيات الخاصة بالنموذج الخطي الذي تم صياغته، بينما الجزء الثاني خصص لمسائل النقل التي تهتم بتدنية تكاليف النقل إلى أدنى حد ممكن، في حين الجزء الأخير تطرق إلى للبرمجة غير الخطية من خلال دراسة أمثلية هذه البرامج في حالة قيود أو بدونها.

هذه المطبوعة تم تحريرها وفقا للبرنامج الوزاري لمقياس "**رياضيات المؤسسة**"، والذي تمت المصادقة عليه من قبل اللجنة الوطنية للتكوين في ميدان علوم التسيير.

كما تجدر الإشارة إلى اعتمادنا في تحرير هذه المطبوعة على كتاب أستاذنا الفاضل "**حاج صحراوي حمودي**" بشكل خاص من خلال اعتماد طريقة السمبلكس المختصرة (استبعاد المصفوفة الأحادية)، طريقة السمبلكس في حال وجود متغيرات وهمية وكذا طريقة السمبلكس على مرحلتين.

في الختام فإننا نضع بين أيدي طلبتنا الأعزاء في مختلف تخصصاتهم (طلبة علوم التسيير، علوم التجارة، والاقتصاد) هذا الجهد المتواضع، والذي يمثل محاولة بسيطة من قبلنا للإسهام في تزويد مكتبة الكلية بمطبوعة في مقياس "**رياضيات المؤسسة**". كما نرجو من أساتذتنا الأفاضل إفادتنا بالتصحيحات اللازمة من أجل إخراج المطبوعة في صورتها النهائية.

الجزء الأول

البرمجة الخطية (المسالة الأصلية)

- ☑ صياغة المسالة (المشكلة)
- ☑ طرق حل مسائل البرمجة الخطية
- ☑ حالات خاصة في البرمجة الخطية
- ☑ سلسلة تمارين مقترحة

تمهيد

يعتبر موضوع البرمجة الخطية من أهم المواضيع المعروفة في مجال بحوث العمليات، حيث تعد إحدى الأساليب واسعة الانتشار والاستخدام للوصول إلى تحقيق الأمثلية، والتي تهتم ببناء النماذج الرياضية لحل المشاكل الاقتصادية سواء كانت إنتاجية أم تمويلية أم إدارية، فهي تساعد في تخصيص الموارد والإمكانيات المتاحة على الاستخدامات المختلفة من أجل تحقيق الأمثلية في التوزيع، كما تستخدم في جدولة الإنتاج لتحديد كميات الإنتاج المثلى، بالإضافة إلى ذلك إمكانية استخدامها في حل مسائل النقل بغية تحديد أفضل شبكة للتوزيع بأقل تكلفة ممكنة.

1.مفهوم البرمجة الخطية

استخدم مفهوم البرمجة الخطية لأول مرة إبان الحرب العالمية الثانية، كأحد الأساليب المساعدة في إيجاد الحلول الممكنة لمشكلات النقل والتوزيع في عمليات الإمداد للوازم الحرب، وكما عالجت مشكلات الإنتاج والعمليات. ويعود الفضل في ذلك إلى الفريق الأمريكي لبحوث العمليات الطريقة المبسطة (السمبلكس) بقيادة جورج دانتزغ (Dantzig) خلال سنة 1947، حيث يعتبر هذا الأخير أول من وضع الصياغة الرياضية لأسلوب البرمجة الخطية. كما أن مصطلح "البرمجة الخطية" مكون من كلمتين: فالأولى"البرمجة" تعني تخطيط الأنشطة أو استخدام الأساليب الرياضية للوصول إلى أفضل الحلول، أما الثانية "الخطية" فتعني أن جميع الدوال في النموذج أو العلاقات تكون خطية.

وتعرّف البرمجة الخطية على أنها:"نموذج رياضي يهدف إلى تحقيق أقصى (Maximum) أو أدنى (Minimum) قيمة لدالة خطية تعرف باسم دالة الهدف (Objective Function)، وهذه الدالة مقيدة بمعادلات أو متراجحات تسمى قيودا (Constraints)."

وتعرف أيضا: "بأنها أسلوب رياضي يهتم بحل المشكلات التي تواجه الإدارة لوضع الخطط، واتخاذ القرارات المتعلقة بتوزيع الموارد المتاحة بين الاستخدامات المتنافسة، بحيث تحقق أعلى مستوى من الأرباح (أو الفوائد)، أو تقليل التكاليف إلى أدنى مستوى ممكن".

2.فرضيات النموذج الخطي

تعتمد نماذج البرمجة الخطية على مجموعة من الفرضيات، وهي:

1.2.الخطية (Linearity): يقصد بها أن تكون العلاقة بين المتغيرات في دالة الهدف والقيود خطية؛

2.2.التناسبية (Proportionatily): يقصد بها أن تكون مساهمة كل متغير في دالة الهدف، فإذا كان الربح الوحدوي للمنتج (A) هو 1 ون، فإن ربح وحدتين من هذا المنتج هو 2 ون؛

2.3.قابلية القسمة (Divisibility): أي يمكن الحصول على أعداد غير صحيحة كحل للمشكلة، أي كسور كقيم لمتغيرات القرار.

2.4.حالة التأكد (certainty): أن تكون كافة معاملات دالة الهدف، ومعلمات القيود محددة ومعروفة بشكل مؤكد، أي أنها تبقى ثابتة أثناء معالجة المشكلة.

2.5.عدم السلبية (non-negative): ويراد بها أن تكون قيم متغيرات القرار غير سالبة، أي: $X_i \geq 0$

2.6.الإضافة (Additivety): بمعنى أن إضافة أي نشاط سوف يتحدد مع مجموعة القيود في النموذج المدروس.

3.شروط استخدام البرمجة الخطية

لكي يمكن استخدام البرمجة الخطية فإن هناك شروط يجب توفرها في المشكلة المراد علاجها:

- محدودية الموارد: ينبغي استخدامها في حالة الندرة، فلو كانت المواد متوفرة لما كانت هناك مشكلة؛
- يجب أن يكون هناك هدف محدد ومعين ومعبر عنه بطريقة كمية كما يجب أن يكون الهدف واضحا ودقيقا بحيث يمكن أن يتخذ شكل معادلة رياضية؛
- وجود علاقة خطية: يفترض أن تكون العلاقة بين متغيرات المسالة خطية؛
- لابد من وجود بدائل مختلفة لتحقيق الهدف؛
- إمكانية التعبير الكمي للمتغيرات.

4.بناء (صياغة) نموذج البرمجة الخطية

لتوضيح كيفية بناء نموذج خطي يمكن إتباع الخطوات التالية:

4.1.متغيرات القرار: هي حلول المسالة (الكميات المثلى) التي يتوجب البحث عن قيمها في ظل محدودية الموارد، كما أنها ترتبط فيما بينها بعلاقة خطية ضمن البرنامج الخطي للمسالة، ونرمز لها بالرمز (X_i).

4.2.صياغة دالة الهدف: تعبر دالة الهدف لبرنامج خطي عادة عن هدف اقتصادي كتعظيم الأرباح، تعظيم الإنتاج، أو تخفيض التكاليف، تخفيض الطاقة العاطلة.....الخ، حيث نرمز لهذه الدالة بالرمز (Z).

4.3.تشكيل القيود: تعبر عن محدودية الموارد كالطاقة الإنتاجية، القوى العاملة، الوقت، الآلات، المواد الأولية، .....الخ، والتي يتم تخصيصها على حسب قيم متغيرات القرار، وهذه القيود يمكن أن تكون على شكل (= أو $\leq$ أو $\geq$).

وتنقسم القيود إلى نوعين:

4.3.1.القيود الداخلية: وهي كل عناصر الإنتاج التي تدخل في تركيبة المنتج؛

4.3.2.القيود الخارجية: هي كل الالتزامات التي تتعلق بالسوق من إنتاج وتسويق؛

4.4.إضافة لقيود اللاسلبية: والتي تشترط أن متغيرات القرار تكون موجبة أو معدومة.

بناء على ما سبق فإن الصيغة العامة للبرنامج الخطي سواء كان على شكل تعظيم (Max) أم تصغير (Min) تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{cases} \text{Max or Min}(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \\ \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n(\leq, \geq, \text{or} =)b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n(\leq, \geq, \text{or} =)b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n(\leq, \geq, \text{or} =)b_m \end{cases} \\ X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

نلاحظ أن القيود قد تكون على شكل متراجحات أو معادلات، كذلك لابد أن تكون قيم متغيرات القرار غير سالبة.

تمثل $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ متغيرات القرار التي يجب البحث عن قيمها المثلى، وتعبر $(C_1, C_2, \dots, C_n)$ عن معاملات دالة الهدف قد تكون أرباح وحدوية أو تكاليف وحدوية، وتعبر $(b_1, b_2, \dots, b_m)$ عن الموارد المتاحة، أما $(a_{ij}(i = 1, \dots n; j = 1, \dots m))$ فهي معلمات فنية (معاملات القيود).

مثال(1):

تقوم شركة الكرة الفضية بتصنيع ثلاث أنواع من آلات كرة الإبرة "فليبرز"، إذ يتطلب كل نوع تقنية تصنيع مختلفة، وتتطلب آلة من نوع (super ball deluxe) 2 ساعة عمل و3 ساعات اختبار، وتحقق هذه الآلة ربحا قدره 300 دولارا؛ في حين تطلب الة من نوع (ball deluxe) ساعة عمل، و4 ساعات اختبار وهي تحقق ربحا قدره 200 دولارا، وتحتاج آلة من نوع (bumper king) إلى 2 ساعة عمل وساعتي اختبار، وتحقق ربحا قدره 100 دولارا، ويفترض توافر 1000 ساعة عمل و30000 دقيقة اختبار.

بالإضافة إلى ذلك قد أظهرت دراسة تنبؤ بالسوق أن الطلب على النوع (super ball deluxe) لن يزيد عن 50 آلة، في حين أن الطلب على(ball deluxe) و(bumper king) سيبلغ 200 آلة بالضبط.

المطلوب: صغ هذه المسألة في شكل برنامج خطي؟.

الحل:

للحصول على البرنامج الخطي لهذه المسالة(المشكلة) وجب إتباع الخطوات التالية:

- **تحديد متغيرات القرار:**

X_1: عدد الآلات من نوع (super ball deluxe)؛

X_2: عدد الآلات من نوع (ball deluxe)؛

X_3: عدد الآلات من نوع (bumper king).

- **تشكيل دالة الهدف:**

وحدة واحدة مباعة من نوع (super ball deluxe)، ينتج عنها ربحا قدره 1×300 ون.

2 وحدة مباعة من نوع (super ball deluxe)، ينتج عنها ربحا قدره 2×300 ون.

فإذا كان X_1 وحدة مباعة من نوع (super ball deluxe)، فإن الربح المتوقع هو $300 \times X_1$ ون.

كذلك عند بيع كمية قدرها X_2 ، فإن الربح هو $200 \times X_2$ ون.

نفس الشيء عند بيع المنتوج الثالث، فمثلا عند بيع كمية قدرها X_3 ، فإن الربح هو $100 \times X_3$ ون.

بما أن المؤسسة تهدف إلى تعظيم الربح من خلال بيع كميات معينة من المنتوجات الثلاثة، فإن شكل الدالة (Z) تأخذ (Max) وبالتالي تصبح كالأتي:

$$Max(Z) = 300X_1 + 200 X_2 + 100 X_3$$

- **تشكيل القيود:** هنا نلاحظ وجود ثلاث أنواع من القيود.

– **القيود الداخلية:** يتم تشكيل القيود كما يلي:

وحدة واحدة من المنتوج الأول تستغرق 2 سا×1.

وحدتين من المنتوج الأول تستغرق 2 سا×2.

⋮ ⋮ ⋮

فإذا كان X_1 وحدة من المنتوج الأول فإنها تستغرق 2 سا × X_1 .

وحدة واحدة من المنتوج الثاني تستغرق 1 سا×1.

وحدتين من المنتوج الثاني تستغرق 1 سا×2.

⋮ ⋮ ⋮

فإذا كان X_2 وحدة من المنتوج الثاني فإنها تستغرق 1 سا × X_2 .

وحدة واحدة من المنتوج الثالث تستغرق 2 سا×1.

وحدتين من المنتوج الثالث تستغرق 2 سا×2.

⋮ ⋮ ⋮

فإذا كان X_3 وحدة من المنتوج الثالث فإنها تستغرق 2 سا × X_3 .

مع العلم أن الوقت المستغرق في إنتاج المنتجات الثلاثة الخاص بساعات العمل يجب أن لا يتعدى 1000 ساعة، وعليه يصبح القيد الأول كالأتي:

$2X_1 + 1\,X_2 + 2X_3 \leq 1000$

لتشكيل القيد الثاني الخاص بساعات الاختبار نتبع نفس العملية، وعليه نحصل على:

$3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 500$

- **القيود الخارجية:**

حسب دراسة السوق فان الطلب على النوع الأول على الأكثر 50 آلة، وبالتالي هذا القيد يكتب على الشكل الأتي:

$X_1 \leq 50$

الكمية المباعة من المنتجين الثاني والثالث 200 وحدة بالضبط، هذا القيد يكتب على النحو التالي:

$X_2 + X_3 = 200$

- **قيود اللاسلبية:**

لا يمكن إنتاج كميات سالبة من كل الأنواع الثلاثة، أي: X_1، X_2 و X_3 على الأقل تأخذ قيمة معدومة، ومنه نكتب القيود على الشكل التالي:

$X_1 \geq 0\ ,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0.$

إذن البرنامج الخطي لهذه المسالة هو كالتالي:

$$\begin{cases} \text{Max}(Z) = 300X_1 + 200\,X_2 + 100\,X_3 \\ 2X_1 + X_2 + 2X_3 \leq 1000 \\ 3X_1 + 4X_2 + 2X_3 \leq 500 \\ X_1 \leq 50 \\ X_2 + X_3 = 200 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0,\ X_3 \geq 0. \end{cases}$$

مثال (2):

تقوم شركة (MY) بإنتاج مشروبات غازية من مصنعين مختلفين في منطقتين (T1) و (T2)، حيث كل مصنع ينتج ثلاث منتجات مختلفة هي (A، B، C)، والجدول الموالي يوضح الطاقة الإنتاجية لكل مصنع خلال اليوم:

المنتجات	المصنع الأول (قارورة)	المصنع الثاني (قارورة)
A	6000	2000
B	1000	2500
C	3000	3000

حسب قسم التسويق فإن الطلب المتوقع على المنتج (A) يجب أن لا يقل عن 80000 قارورة، والمنتج (B) هو 22000 قارورة، والمنتج (C) هو 40000 قارورة خلال شهر جوان القادم، مع العلم أن تكلفة الإنتاج اليومية في المصنعين هي 6000، 4000 ون على التوالي.

المطلوب: استخدم طريقة البرمجة الخطية لصياغة المسالة من أجل تخفيض التكاليف؟

الحل:

- **تحديد متغيرات القرار**

X_1: عدد أيام العمل في المصنع الأول؛

X_2: عدد أيام العمل في المصنع الثاني.

- **تشكيل دالة الهدف**

يوم عمل في المصنع الأول يكلف 6000 ون.

فإذا كان X_1 يوم عمل في المصنع الأول يكلف $6000 \times X_1$ ون.

نفس الشيء للمصنع الثاني، فمثلا X_2 أيام عمل في المصنع الثاني تكلف $4000 \times X_2$ ون.

بما أن الشركة تهدف إلى تخفيض التكاليف، فإن شكل الدالة (Z) تأخذ (Min)، وبالتالي تصبح كالأتي:

$$Min(Z) = 6000X_1 + 4000\ X_2$$

- **تشكيل القيود:** في هذه الحالة لا وجود للقيود الداخلية.

– **القيود الخارجية:** لدينا ثلاثة قيود خارجية خاصة بمنتجات الشركة.

قيد خاص بالمنتج (A):

يوم عمل في المصنع الأول ينتج 6000 قارورة من نوع (A)

فإذا كان X_1 يوم عمل في المصنع الأول فإن الإنتاج يقدر بـ $6000 \times X_1$.

يوم عمل في المصنع الثاني ينتج 2000 قارورة من نوع (A)

فإذا كان X_1 يوم عمل في المصنع الثاني فان الإنتاج يقدر بـ $2000 \times X_1$.

مع العلم ان الطلب المتوقع من هذا المنتج هو 80000 قارورة، وعليه يصبح القيد الأول كالأتي:

$6000X_1 + 2000X_2 \geq 80000$

أو $3X_1 + X_2 \geq 40$

قيد خاص بالمنتج (B):

نتبع نفس الخطوات من اجل تشكيل القيد الثاني الخاص المنتوج (B)، وعليه نحصل على:

$1000X_1 + 2500X_2 \geq 22000$

أو $X_1 + 5/2X_2 \geq 22$

قيد خاص بالمنتج (C):

نتبع نفس الخطوات من اجل تشكيل القيد الثاني الخاص المنتوج (C)، وعليه نحصل على:

$3000X_1 + 3000X_2 \geq 40000$

أو $X_1 + X_2 \geq 40/3$

- **قيود اللاسلبية:**

بما أن عدد الأيام لا يمكن أن تكون سالبة، لابد أن تكون (X_1، X_2) على الأقل قيمهما معدومة، ومنه نكتب القيود على الشكل التالي:

$X_1 \geq 0$, $X_2 \geq 0$

إذن البرنامج الخطي لهذه المسالة هو كالتالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 6000X_1 + 4000\ X_2 \\ 3X_1 + X_2 \geq 40 \\ X_1 + 5/2X_2 \geq 22 \\ X_2 + X_3 \geq 40/3 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0. \end{cases}$$

5.طرق حل مسائل البرمجة الخطية

هناك عدة طرق يتم بواسطتها حل البرامج الخطية منها: طريقة الرسم البياني وطريقة السمبلكس.

1.5.الطريقة البيانية (Graphical Method)

تعد هذه الطريقة من أسهل الطرق المستعملة في حل مسائل البرمجة الخطية، ولا تحتاج إلى خلفية علمية متقدمة في الرياضيات، بل معلومات أساسية عن قواعد حل المعادلات ورسم الدوال، إلا أن استخدامها يقتصر على حالات خاصة لا يزيد عدد المتغيرات عن ثلاثة، وذلك بسبب استحالة التمثيل بالرسم البياني في حالة ازدياد المتغيرات عن ثلاث.

ونظرا لصعوبة التمثيل للمسائل ذات ثلاثة متغيرات، فإننا نقتصر على استخدام هذه الطريقة لحل المسائل ذات متغيرين فقط. وبموجب هذه الطريقة نقوم بتمثيل دالة الهدف والقيود على شكل خط مستقيم في معلم متعامد متجانس، وبعد ذلك يتم تحديد منطقة الحلول الممكنة (المنطقة غير المشطبة). ولحل نموذج البرمجة الخطية ذات متغيرين نتبع الخطوات التالية:

- تحويل القيود (المتراجحات فقط) إلى معادلات؛
- استخراج النقاط المساعدة في عملية رسم كل مستقيم؛
- رسم المعادلات، ثم تشطيب المجالات المرفوضة بناءً على اتجاه المتراجحة؛
- تحديد نقاط تقاطع القيود لمعرفة منطقة الحلول الممكنة (المنطقة غير المشطبة)؛
- تحديد إحداثيات نقاط (زوايا) منطقة الحلول الممكنة، وتعويضها في دالة الهدف؛
- اختيار النقطة التي تعظم أو تقلل دالة الهدف، والتي تمثل إحدى رؤوس منطقة الحلول الممكنة.

مثال(3):

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} \text{Min}(Z) = 3X_1 + 5X_2 \\ \begin{cases} 2X_1 + 3X_2 \leq 30 \\ 5X_1 + 4X_2 \leq 60 \\ X_1 \geq 5 \end{cases} \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: حل المسالة الآتية باستخدام طريقة الرسم البياني؟

الحل:

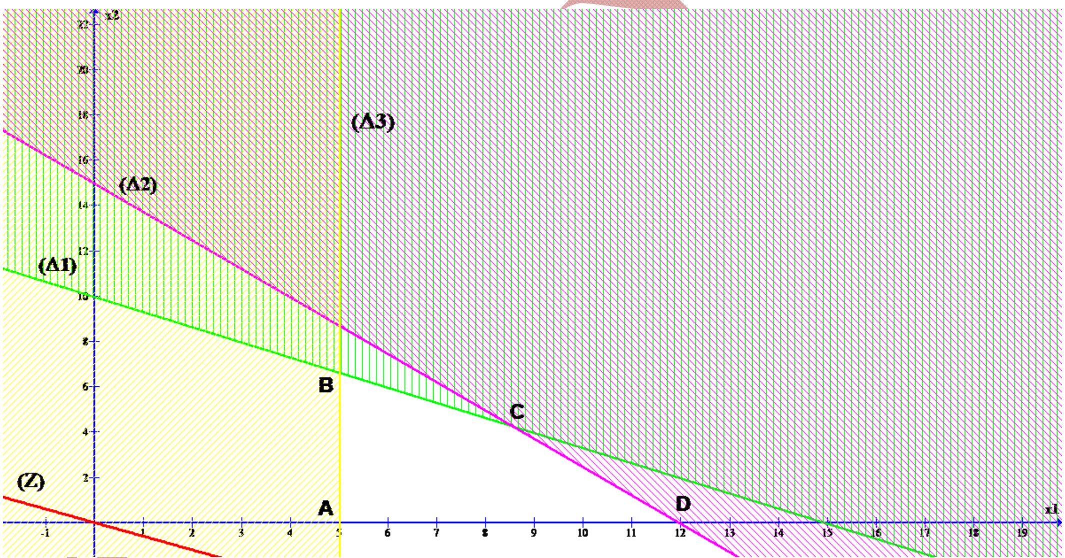
يتم تحويل القيود إلى معادلات وفق الشكل الآتي:

$$\begin{cases} 2\,X_1 + 3\,X_2 = 30 \ldots\ldots\ldots (\Delta 1) \\ 5\,X_1 + 4\,X_2 = 60 \ldots\ldots\ldots (\Delta 2) \\ X_1 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (\Delta 3) \end{cases}$$

ثم نقوم بتحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم، وهي مبينة في الجدول الأتي:

	X_1	X_2
(Δ1)	0	10
	15	0
(Δ2)	0	15
	12	0
(Δ3)	5	0

بعد تحديد النقاط المساعدة في الرسم البياني، نستعين ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم.



من الشكل البياني، يتضح بأن منطقة الحلول المكنة محدودة بالنقاط (A، B، C، D)، إذ أن:

- النقطة (A) إحداثياتها (5، 0)، نعوضها في دالة الهدف نجدها تساوي: Z(A)=3(5)+5(0) =15
- أما النقطة (B) إحداثياتها (4، ؟)، ولإيجاد ترتيبة هذه النقطة نتبع ما يلي:

بالنسبة لهذه النقطة نحصل عليها من تقاطع المستقيمين (Δ1) و(Δ3) أي أن:

$$\begin{cases} 2\,X_1 + 3\,X_2 = 30 \ldots\ldots\ldots (1) \\ X_1 = 5 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2) \end{cases}$$

من المعادلة (2) نحصل على ما يلي:

$X_1 = 5$.....................(2)

نقوم بتعويض قيمة (X_1) في المعادلة (2) نحصل على:

$2\,(5) + 3\,X_2 = 30$.........(1)
$X_2 = 20/3$
$B(5\,,20/3) \rightarrow Z(B)=3(5)+5(20/3)=145/3$

– النقطة (C) مجهولة الإحداثيات، وبالتالي يجب البحث عن فاصلة وترتيبة هذه النقطة.

بالنسبة لهذه النقطة نحصل عليها من تقاطع المستقيمين ($\Delta 1$) و($\Delta 2$) أي أن:

$$\begin{cases} 2\,X_1 + 3\,X_2 = 30 \text{.........(1)} \\ 5\,X_1 + 4\,X_2 = 60 \text{.........(2)} \end{cases}$$

من المعادلة (1) نحصل على ما يلي:

$X_1 = -3/2\,X_2 + 15$.........(3)

نقوم بتعويض قيمة (X_1) في المعادلة (2)، نحصل على:

$5\,(-3/2\,X_2 + 15) + 4\,X_2 = 60$.........(2)
$X_2 = 30/7$

نقوم بتعويض قيمة (X_2) في المعادلة (3)، فنحصل على:

$X_1 = 120/14$
$C(120/14\,,30/7) \rightarrow Z(C)=3(120/14)+5(30/7)=660/14$

– النقطة (D) إحداثياتها (12، 0) نعوضها في دالة الهدف فنجدها تساوي:

$Z(D)=3(12)+5(0)=36$

بما أن دالة الهدف هي من الشكل (Min)، فإن الحل الأمثل* هو النقطة $A(5,0)$، أي أن:

$X_1 = 5,\ X_2 = 0,\ Min(Z)=15$

ملاحظة:

في حالة كون عدد نقاط (زوايا) منطقة الحلول الممكنة كثير، نلجأ إلى رسم مستقيم معادلة دالة الهدف، ونزيحها نحو الأعلى فإذا كانت دالة الهدف تعظيم، فإن آخر نقطة يمسها مستقيم (Z) تكون هي الحل الأمثل، أما إذا كانت مسألة تخفيض، فإن أول نقطة يمسها مستقيم دالة الهدف تعتبر حلا أمثلا.

* – **الحل الأمثل**: هو الحل المقبول (أي الحل الذي يحقق كافة القيود)، فضلا عن جعله قيمة الهدف في نهايتها العظمى أو الصغرى.

مثال(4):

تنتج شركة الواحة الصناعية نوعان من الدهانات (A) و(B)، وذلك باستخدام نوعين من المواد الخام (M1) و (M2) ويصور الجدول التالي البيانات الأساسية الخاصة بالمشكلة:

			الطاقة المتاحة
	الدهان (A)	الدهان (B)	في اليوم (طن)
المادة الخام (M1)	6	4	24
المادة الخام (M2)	1	2	6
الربح لكل طن (ون)	5	4	

تشير دراسة السوق إلى أن الطلب اليومي على الدهان (B) لا يمكن أن يتجاوز الطلب على الدهان (A) بأكثر من طن واحد، كما أن أقصى كمية للطلب اليومي من الدهان (B) تبلغ 2 طن. وترغب الشركة في تحديد المزيج الأمثل من المنتجات (A) و(B)، والذي يؤدي إلى تعظيم الربح الإجمالي اليومي للشركة.

الحل:

متغيرات القرار

X_1: عدد الأطنان التي يتم إنتاجها يوميا من الدهانات (A)؛

X_2: عدد الأطنان التي يتم إنتاجها يوميا من الدهانات (B).

البرنامج الخطي لهذه المسالة هو كالتالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 5X_1 + 4X_2 \\ \begin{cases} 6X_1 + 4X_2 \leq 24 \\ X_1 + 2X_2 \leq 6 \\ X_2 - X_1 \leq 1 \end{cases} \\ X_2 \leq 2 \\ X_1 \geq 0 , X_2 \geq 0 \end{cases}$$

لرسم البرنامج الخطي المتحصل يتوجب إتباع الخطوات التالية:

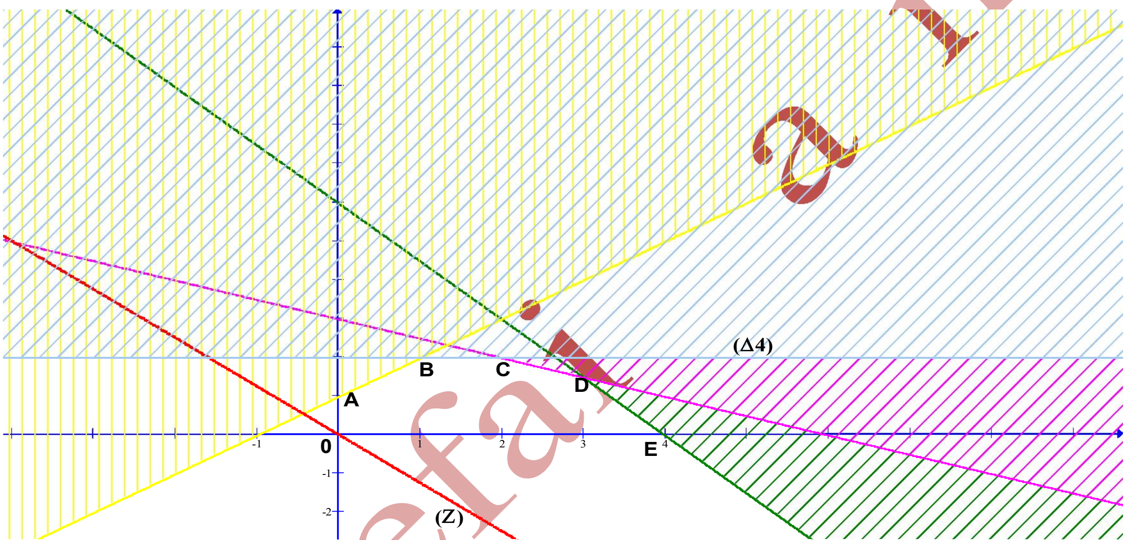
- تحويل القيود إلى معادلات وفق ما يلي:

$$\begin{cases} 6X_1 + 4X_2 = 24 \ldots\ldots\ldots(\Delta 1) \\ X_1 + 2X_2 = 6 \ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 2) \\ X_2 - X_1 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 3) \\ X_2 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 4) \end{cases}$$

– تحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم، وهي مدونة في الجدول الموالي:

	X_1	X_2
(Δ1)	0	6
	4	0
(Δ2)	0	3
	6	0
(Δ3)	0	1
	-1	0
(Δ4)	0	2

– الرسم البياني: بعد تحديد النقاط المساعدة، نستعين ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم.



إن المساحة المتمثلة بالشكل سداسي الأضلاع (A، B، C، D، E،O)، والتي تحددت أسفل المستقيمات التي تمثل القيود، تمثل منطقة الحلول الممكنة، إن كل النقاط التي هي داخل هذه المنطقة او على حدودها تمثل حلولا للمسالة، والحل الأمثل هو أحد رؤوسها. لذا وجب تحديد إحداثيات كل نقطة وتعويضها في دالة الهدف.

– **النقطة (A)** إحداثياتها (0، 1)، نعوضها في دالة الهدف نجدها تساوي: $Z(A)=5(0)+4(1)=4$

– **النقطة (B)** إحداثياتها (؟، 2)، ولإيجاد فاصلة هذه النقطة نتبع ما يلي:

بالنسبة لهذه النقطة نحصل عليها من تقاطع المستقيمين (Δ3) و(Δ4) أي أن:

$$\begin{cases} X_2 - X_1 = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1) \\ X_2 = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2) \end{cases}$$

نقوم بتعويض قيمة (X_2) في المعادلة (1)، فنحصل على:

$X_1 = 1$.........................(1)
$B(1,2) \rightarrow Z(B)=5(1)+4(2)=13$

- **النقطة (C)** إحداثياتها (؟، 2)، بالتالي يجب البحث عن فاصلة هذه النقطة.

بالنسبة لهذه النقطة نحصل على إحداثياتها من تقاطع المستقيمين (Δ2) و(Δ4)، أي:

$$\begin{cases} X_2 + 2X_1 = 6 \text{..........(1)} \\ X_2 = 2 \text{.................(2)} \end{cases}$$

نقوم بتعويض قيمة (X_2) في المعادلة (1)، نحصل على:

$X_1 = 2$.........(1)
$C(2,2) \rightarrow Z(C)=5(2)+4(2)=18$

- **النقطة (D)** مجهولة الإحداثيات وهي تنتمي إلى تقاطع المستقيمين (Δ1) و(Δ2) أي أن:

$$\begin{cases} 6X_1 + 4X_2 = 24 \text{.........(1)} \\ X_1 + 2X_2 = 6 \text{.............(2)} \end{cases}$$

نضرب المعادلة (2) في 2 ونطرح المعادلة الأولى من الثانية، فنحصل على ما يلي:

$X_1 = 3$....................(3)

نقوم بتعويض قيمة (X_1) في المعادلة (2) نحصل على:

$X_2 = 3/2$
$C(3,3/2) \rightarrow Z(C)=3(3)+5(3/2)=21$

- **النقطة (E)** إحداثياتها (4، 0) نعوضها في دالة الهدف فنجدها تساوي:

$Z(D)=5(4)+4(0)=20$

بما أن دالة الهدف هي من الشكل (Max)، فإن الحل الأمثل هو النقطة D(3, 3/2)، أي أن:

$X_1=3, X_2=3/2, Max(Z)=21$

2.5.طريقة السمبلكس (Simplex Method)

تناولنا فيما سبق الطريقة البيانية في حل مشكلة البرمجة الخطية، ولكن هناك قصورا واضحا في هذه الطريقة لكونها لا تستخدم إلا في حالة وجود متغيرين أو أقل، ولمعالجة ذلك طور العالم الأمريكي "جورج دانتزيغ (Dantzig) طريقة تسمى "**بالسمبلكس**"، والتي تبنى على مجموعة من الخطوات تؤدي إلى الوصول للحل الأمثل. ومع ظهور البرمجيات الحاسوبية عرفت هذه الطريقة استخداما واسعا ونجاحا كبيرا في معالجة المشاكل الكبيرة والمعقدة، ومن بينها: (Tora, Storm, Lindo, Lingo, QM, WinQnsb,).

1.2.5.طريقة السمبلكس العادية (حالة تعظيم)

في هذا النوع من السمبلكس، يشترط أن تكون دالة الهدف على شكل (Max)، وكل القيود أقل أو يساوي، كما أن الطرف الأيمن من القيود يكون موجبا، وفي حالة تحقق هذه الشروط مجتمعة نكون في سمبلكس عادي.

وحتى نتمكن من استعمال هذه الطريقة يمكن إتباع المراحل التالية:

أ.**المرحلة الأولى:** تكوين النموذج القياسي أو المعياري (Standard Model)، حيث يتم تحويل النموذج الأصلي لمشكلة البرمجة الخطية (المسالة الأصلية Primal) إلى النموذج القياسي، وتتلخص هذه الخطوة فيما يلي:

- صياغة المسالة الأصلية (تكوين البرنامج الخطي)؛
- نقل المجاهيل (المتغيرات) في دالة الهدف من الطرف الأيمن إلى الطرف الأيسر، أي تصبح معادلة صفرية؛
- إذا كانت إشارة القيد أقل أو يساوي، يتم إضافة مكمل (متغير) إلى الجانب الأيسر للقيد، ويسمى بمتغير الفرق،* ونرمز له بالرمز (Si)، حيث يظهر هذا المتغير بمعامل 0 في دالة الهدف.

وعليه فإذا كان الشكل العام للبرنامج الخطي لدالة الهدف (Max) قانوني** معطى بالشكل الآتي:

$$\begin{cases} Max(Z) = C_1X_1 + C_2X_2 + \cdots + C_nX_n \\ \begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \le b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \le b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \le b_m \end{cases} \\ X_1, X_2, \dots, X_n \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} Max\ Z = \sum C_jXj \\ \sum A_{ij}\ Xj \le b_i \\ X_j \ge 0 \end{cases}$$

* – في حالة القيد الداخلي يسمى بمتغير الطاقة العاطلة، أما إذا كان القيد (≤) يسمى بمتغير الفائض.

** – يعني شكل الدالة (Max) وكل القيود اقل أو يساوي، مع الطرف الأيمن من القيود موجب.

فإن الصيغة القياسية لهذا البرنامج نحصل عليها بإضافة متغيرات الفجوة (الطاقة العاطلة)(S_i) إلى الطرف الأيسر من القيود لتتحول بذلك إلى معادلات، وفق ما يلي:

$$\begin{cases} (Z) - C_1X_1 - C_2X_2 - \cdots - C_nX_n + 0S_1 + 0S_2 + \cdots + 0S_m = 0 \\ a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n + 1S_1 + 0S_2 + \cdots + 0S_m = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n + 0S_1 + 1S_2 + \cdots + 0S_m = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n + 0S_1 + 0S_2 + \cdots + 1S_m = b_m \\ S_1, S_2, \dots, S_m \geq 0; X_1, X_2, \dots, X_n \geq 0 \end{cases}$$

بهذه الصورة نكون قد تحصلنا على الشكل المعياري للبرنامج الخطي، أما بالنسبة للمتغيرات الجديدة (S_i) تعتبر متغيرات أساسية في المرحلة الموالية (إنشاء جدول الحل الأساسي)، وتتميز عن باقي المتغيرات بما يلي:

- تظهر مرة واحدة في كل معادلة؛
- معاملها (+1) في حالة القيد أقل أو يساوي، لأن الطرف الأيسر أقل من الطرق الأيمن، لذا وجب إضافة كمية قدرها (S_i)؛
- تشكل هذه المتغيرات أساس الجدول في حالة تحقيق الشرطين اعلاه، وقيمها في الجدول الأساسي هي قيم الطرف الأيمن من القيود (يمكن اعتبارها قيم الموارد المتاحة مادام لم ينطلق النشاط).

ب.المرحلة الثانية: إيجاد جدول الحل الأساسي (Initial tableau) للحصول على حل أولي ممكن، والذي يناظر الحل الأولي عند نقطة الأصل في طريقة الرسم البياني. يتم التوصل إليه بفرض قيم كل متغير من المتغيرات الأصلية (X_j) في المشكلة المدروسة مساوية للصفر، وهو حل مقبول رياضيا ومرفوض اقتصاديا.

بصفة عامة يتم إدراج مصفوفة الأحادية في جدول الحل الأساسي(الجدول الموسع)، إلا أنه سيتم إهمال مصفوفة الأحادية (هذه المصفوفة لا تأثير لها في عمليات الضرب عند الانتقال من جدول إلى آخر) في هذا الجدول، وبالتالي نحصل على الجدول المختصر كما يلي:

الجدول الأول		متغيرات خارج الأساس				قيمة الطرف الأيمن من القيود
		X_1	X_2	...	X_n	
متغيرات أساسية	S_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	b_1
	S_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	b_2
		$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	
	S_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	b_m
(Z)		$-C_1$	$-C_2$	...	$-C_n$	0

نلاحظ في جدول الحل الأساسي أن هناك نوعين من المتغيرات، متغيرات الفرق (S_i) تكون داخل الأساس، وقيمها عند بداية الحل هي قيم العمود الأخير(b_i)، بينما متغيرات القرار (X_j) تكون خارج الأساس وقيمها معدومة، وعليه دالة الهدف كذلك مساوية للصفر.

ج.**المرحلة الثالثة**: تحسين الحل الأساسي إلى حين بلوغ الحل الأمثل (تحسين قيمة دالة الهدف) وفق الخطوات التالية:

- **تحديد المتغير الداخل**: هو العمود الموافق لأكبر قيمة بالقيمة المطلقة في سطر دالة الهدف (Z). ويسمى العمود الذي تنتمي إليه المتغيرة التي تدخل إلى الأساس **بعمود الارتكاز**؛
- **تحديد المتغير الخارج**: نحصل عليه بقسمة عناصر العمود الأخير (قيم الطرف الأيمن من القيود) على العناصر الموجبة المقابلة لها في عمود الارتكاز، والمتغير الذي يقابل أقل حاصل قسمة موجب يعد هو المتغير الذي يخرج من الأساس، وهذا ما يعطينا **سطر الارتكاز**؛
- **تحديد عنصر الارتكاز**: العنصر الناتج من تقاطع عمود الارتكاز مع سطر الارتكاز يسمى بعنصر الارتكاز (Pivot).

إن استخلاص الجدول الموالي يكون وفق ما يلي:

- استبدال المتغير الذي سيخرج من الأساس بالمتغير الذي ستدخل إلى الأساس؛
- يتم استبدال عنصر الارتكاز بمقلوبه؛
- باقي عناصر سطر الارتكاز تقسم على موجب عنصر الارتكاز؛
- باقي عناصر عمود الارتكاز تقسم على سالب عنصر الارتكاز؛
- أما العناصر المتبقية فهي تحسب وفق المعادلة التالية:

العنصر الجديد = العنصر القديم – (المقابل له في سطر الارتكاز* المقابل له في عمود الارتكاز) / عنصر الارتكاز

يمكن الحصول على الحل الأمثل (Optimal Solution) لمشكلة التعظيم، وذلك عندما تكون جميع عناصر سطر دالة الهدف موجبة أو معدومة. أما في حالة وجود عناصر سالبة، فهذا يعني عدم التوصل إلى الحل الأمثل، ونعيد الخطوات السابقة (طريقة تكرارية Iterative methode).

مثال (5):

ليكن لديك البرنامج الخطي لشركة مختصة في صناعة ثلاثة أنواع من الطاولات (C,B,A).

$$\begin{cases} \text{Max } Z = 50X_1 + 40X_2 + 35X_3 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 \leq 1000 & \text{قيد الحديد (متر)} \\ X_1 + X_3 \leq 2000 & \text{قيد الخشب (متر)} \\ X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 800 & \text{قيد ساعات العمل (ساعة)} \end{cases}$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

المطلوب: حل المسألة الآتية بطريقة السمبلكس المناسبة؟

الحل:

نقوم بتكوين الشكل القياسي انطلاقا من البرنامج الخطي للمسالة، وذلك بإضافة متغير الطاقة العاطلة على النحو الآتي:

$$Z -50X_1 - 40X_2- 35X_3=0$$
$$2X_1 + X_2+ X_3 + S_1 =1000$$
$$X_1+ X_3 \qquad + S_2 =2000$$
$$X_1 + 2X_2+ X_3 + S_3 =800$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0, S_1, S_2, S_3 \geq 0$$

بعد ذلك نحصل على جدول الحل الأساسي كما يلي:

T1	X_1	X_2	X_3	b_i	النسبة
S_1	2	1	1	1000	500
S_2	1	0	1	2000	2000
S_3	1	2	1	800	800
Z	-50	-40	-35	0	

T2	S_1	X_2	X_3	
X_1	1/2	1/2	1/2	500
S_2	-1/2	-1/2	1/2	1500
S_3	-1/2	3/2	1/2	300
Z	25	-15	-10	25000

بالنسبة لجدول الحل الأساسي (T1)، فإن المتغير الداخل هو (X_1)، كونه موجود في عمود الارتكاز (أكبر عائد لدالة الهدف) في سطر دالة الهدف (Z). أما المتغير الخارج هو (S_1) كونه يقابل أقل حاصل قسمة موجب (قسمة قيم العمود الأخير على عناصر عمود الارتكاز)، ويسمى سطر (S_1) بسطر الارتكاز. بينما تقاطع سطر الارتكاز مع عمود الارتكاز يعطي عنصر الارتكاز، وهو (2).

للحصول على الجدول الثاني (T2) يجب إتباع خطوات تحسين الحل المذكورة سابقا، وهي:

- في مكان عنصر الارتكاز يصبح مقلوب عنصر الارتكاز، أي نحصل على (1/2)؛
- بقية عناصر سطر الارتكاز تقسم على عنصر الارتكاز، فنحصل على (1/2، 1/2، 500) بالترتيب؛
- بقية عناصر عمود الارتكاز تقسم على سالب عنصر الارتكاز، أي نحصل على(-1/2، -1/2، 25)؛
- العناصر المتبقية في الجدول تحسب بالقاعدة المذكورة سابقا.

نلاحظ من الجدول (T2) أن دالة الهدف ارتفعت إلى حدود 25000ون، وهذا راجع لإنتاج 500 طاولة من النوع الأول. إلا أن التمعّن في السطر الأخير بجدول السمبلكس لهذا الحل، يُظهر وجود قيم سالبة في سطر دالة الهدف، مما يعني أن هناك حلا آخر أفضل من هذا الحل، ويعطي ربحا إضافيا في حالة الانتقال إليه (أي الحل المتحصل عليه ليس حلا امثلا)، وبالتالي فهو قابل للتحسين. بنفس الخطوات المطبقة في الجدول الأول، حيث نختار عمود الارتكاز ثم سطر الارتكاز في الجدول الثاني للمرور إلى الجدول الثالث.

T3	S_1	S_3	X_3	
X_1	2/3	-1/3	1/3	400
S_2	-2/3	1/3	2/3	1600
X_2	-1/3	2/3	1/3	200
Z	20	10	-5	28000

T4	S_1	S_3	X_2	
X_1	1	-1	-1	200
S_2	0	-1	-2	1200
X_3	-1	2	3	600
Z	15	20	15	31000

من خلال الجدول الثالث يتبين أنه ليس حلا امثلا، لذا فهو قابل كذلك للتحسين، وبالتالي نختار سطر الارتكاز وعمود الارتكاز ونكمل الخطوات الأخرى. أما بالنسبة للجدول الرابع، فنلاحظ أن جميع قيم سطر دالة الهدف غير سالبة، وعليه يكون هذا الجدول هو جدول الحل الأمثل، وبالتالي الحل الأمثل لهذه المسالة هو:

$\mathbf{X_1=200, X_2=0, X_3=600, S_1=0, S_2=1200, S_3=0, Z=31000.}$

يتضح من هذه النتائج أن إدارة الشركة ستتخذ قرارا بإنتاج 200 طاولة من النوع الأول، و600 طاولة من النوع الثالث، وعدم إنتاج النوع الثاني، لتحقيق أعظم ربح قدره 31000 ون، مع بقاء طاقة عاطلة في القيد الثاني قدرها 1200 متر من الخشب.

2.2.5.السمبلاكس على مرحلتين (Two-Phase Method)

من خلال المثال الذي تطرقنا إليه في السمبلكس العادية، يلاحظ أن كل القيود كانت على شكل أقل من أو يساوي والطرف الأيمن موجب، لهذا تم الحصول على المتغيرات الأساسية لكل قيد بسهولة، غير أنه في الواقع قد تواجهنا بعض المسائل لا تكون فيها كل القيود في شكل أقل من أو يساوي، والطرف الأيمن من القيود قد لا يكون موجبا.

ولحل مثل هذه المسائل نلجأ إلى طريقة السمبلكس على مرحلتين، حيث في المرحلة الأولى نحاول الدخول إلى منطقة الحلول الممكنة، بينما في المرحلة الثانية يتم البحث فيها عن الحل الأمثل.

في هذه الحالة لابد من إجراء التحويلات التالية:

- إذا كانت دالة الهدف على شكل (Min) تضرب في (1-)، لتتحول إلى Max(-Z)
- إذا كانت صيغة القيد أكبر من أو يساوي، في هذه الحالة يتم ضرب المتراجحة في (1-) لتتحول إلى متراجحة من الشكل أقل أو يساوي؛
- إذا القيد في شكل مساواة، نضيف متغير اصطناعي (وهمي) للطرف الأيسر، نرمز له بالرمز (a_i)، ويضاف إلى دالة الهدف بمعامل (0). مهمته المساعدة في الحل، وتعطى له الأولوية في الخروج من الأساس، فإذا أصبح متغير خارج الأساس لا يمكن رجوعه إلى داخل الأساس.

بهذه الطريقة نواجه مشكلة أخرى هي وجود قيم سالبة في الطرف الأيمن من القيد (العمود الأخير) في هذه الحالة سوف نكون خارج منطقة الحل، لذا نستعين بدالة وهمية (Z^I) تحسب عناصرها في الجدول كما يلي:

- نضرب السطر الذي فيه متغير وهمي في (1-)؛
- تضرب عناصر السطر الذي فيه قيمة سالبة في العمود الأخير في (1+)؛
- بينما تضرب عناصر الأسطر الباقية في الصفر.

بعد كل هذه العمليات نجمع كل عمود على حدا، لنحصل على قيم سطر دالة الهدف الجديدة (Z^I)، فإذا لم نجد أي عنصر سالب في السطر نتوقف لأن المسالة ليس لها حل. لأنه لا نستطيع الدخول إلى منطقة الحلول الممكنة، وبالتالي لا يمكن البحث عن الحل الأمثل.

مثال (6):

حل المسألة الآتية بطريقة السمبلكس على مرحلتين؟

$$\text{Max } Z = 4X_1 + 5X_2$$
$$X_1 + X_2 = 10$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 20$$
$$2X_1 - X_2 \geq 14$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

الشكل القياسي:

$$Z = 4X_1 + 5X_2$$
$$X_1 + X_2 + a_1 = 10$$
$$X_1 + 3X_2 + S_2 = 20$$
$$-2X_1 + X_2 + S_3 = -14$$
$$X_1, X_2 \geq 0,\ S_2, S_3 \geq 0,\ a_1 = 0$$

انطلاقا من الشكل القياسي يمكن إنشاء جدول الحل الأساسي كما يلي:

	(0)	(0)	
T1	X_1	X_2	
(-1) a_1	1	1	10
(0) S_2	1	3	20
(1) S_3	-2	1	-14
Z^I	-3	0	x

	(0)	(5)	
	a_1	X_2	
(4) X_1	1	1	10
(0) S_2	-1	2	10
(0) S_3	2	3	6
(Z)	4	-1	40

نلاحظ من حلول الجدول الأول وجود متغير وهمي داخل الأساس، وكذا قيمة (S_3) سالبة، مما يدل على أن دالة الهدف في هذا الجدول هي دالة وهمية (Z^I)، وبالتالي ندخل معاملاتها (0، 1، 1-). أما بالنسبة للجدول الثاني نلاحظ عدم وجود قيم سالبة في العمود الأخير مع خروج المتغير الوهمي من الأساس، مما يدل على دخولنا إلى منطقة الحلول الممكنة، لذا ندخل معاملات دالة الهدف الحقيقة (4، 5) في هذا الجدول بغية الحصول على سطر دالة الهدف الحقيقة (Z).

T3	a_1	S_3	
X_1	1/3	-1/3	8
S_2	-7/3	-2/3	6
X_2	2/3	1/3	2
(Z)	14/3	1/3	42

نلاحظ من الجدول الثالث أن جميع قيم سطر دالة الهدف هي أكبر أو تساوي الصفر، وعليه الحل الأمثل لهذه المسالة هو كالآتي:

$\mathbf{X_1=8,\ X_2=2,\ a_1=0,\ S_2=6,\ S_3=0,\ Z=42.}$

3.2.5.السمبلكس بإدخال متغير وهمي (Artificial Variable simplex)

يكمن الاختلاف بين طريقة السمبلكس على مرحلتين والسمبلكس العادية في بإدخال متغير وهمي في كيفية معالجة القيد على شكل أكبر أو يساوي، حيث يبقى القيد كما هو، إلا أننا نضيف له متغير وهمي إلى شكله القياسي، لأن متغير الفرق تكون إشارته سالبة، وبالتالي هذا الأخير لا يدخل إلى الأساس، فالمتغير الوهمي هو الذي يدخل إلى الأساس في جدول الحل الأساسي.

مثال(7): حل البرنامج الخطي التالي بطريقة السمبلكس على مرحلتين؟

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2$$
$$X_1 + 2X_2 = 26$$
$$2X_1 + X_2 \leq 18$$
$$3X_1 + 2X_2 \geq 30$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

الحل:

الشكل القياسي لهذا البرنامج هو كالأتي:

$$\text{Max } Z = 2X_1 + 4X_2$$
$$X_1 + 2X_2 + a_1 = 26$$
$$2X_1 + X_2 + S_2 = 18$$
$$3X_1 + 2X_2 - S_3 + a_3 = 30$$
$$X_1, X_2 \geq 0,\ \ S_2, S_3 \geq 0,\ \ a_1, a_3 = 0$$

جداول السمبلكس:

	(0)	(0)	(0)	
T1	X_1	X_2	S_3	
(-1) a_1	1	2	0	26
(0) S_2	2	1	0	18
(-1) a_3	3	2	-1	30
Z^I	-4	-4	1	x

	(0)	(0)	(0)	
T2	X_1	a_1	S_3	
(0) X_2	1/2	1/2	0	13
(0) S_2	3/2	-1/2	0	5
(-1) a_3	2	-1	-1	4
(Z^I)	-2	1	1	x

جدول الحل الأمثل:

T3	a_3	a_1	S_3	
(4)X_2	-1/4	3/4	1/4	12
(0)S_2	-3/4	1/4	3/4	2
(2)X_1	1/2	-1/2	-1/2	2
(Z)	0	2	0	32

نلاحظ أن الجدول الثالث هو عبارة عن جدول الحل الأمثل لأن جميع قيم سطر دالة الهدف أصبحت أكبر أو تساوي الصفر، وبالتالي حل هذه المسالة هو كالآتي:

$$X_1=2,\ X_2=12,\ a_1=0,\ a_3=0,\ S_2=2,\ S_3=0,\ Z=32.$$

6.الحالات الخاصة في البرمجة الخطية

يمكن أن نصادف عدة حالات خاصة أثناء البحث عن الحل الأمثل سواء باستخدام الطريقة البيانية أم السمبلكس، ومنها يلي:

1.6.حالة تعدد الحلول المثلى (Alternate Optimal Solution)

تظهر هذه الحالة عندما يكون أكثر من حل واحد يعطي نفس القيمة المثلى لدالة الهدف، ويحدث عندما يكون الخط البياني الذي يمثل دالة الهدف موازيا تماما لأحد القيود، ويشكل أحد حدود منطقة الحل الممكنة، أي بصيغة أخرى أن الحل الأمثل يقع على عدة نقاط تؤدي جميعها إلى نفس القيمة المثلى لدالة الهدف. وفي حالة استعمال السمبلكس يتم تشخيص هذه الحالة بوجود الصفر في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل.

مثال (8):

استخدم الطريقة البيانية لحل البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Min(Z) = 5X_1 + 5X_2 \\ \begin{cases} 3X_1 + 2X_2 \le 30 \\ X_1 + 2X_2 \ge 15 \\ X_1 + X_2 = 10 \end{cases} \\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام بالطريقة البيانية وطريقة السمبلكس؟

1.1.6.الحل بالطريقة البيانية

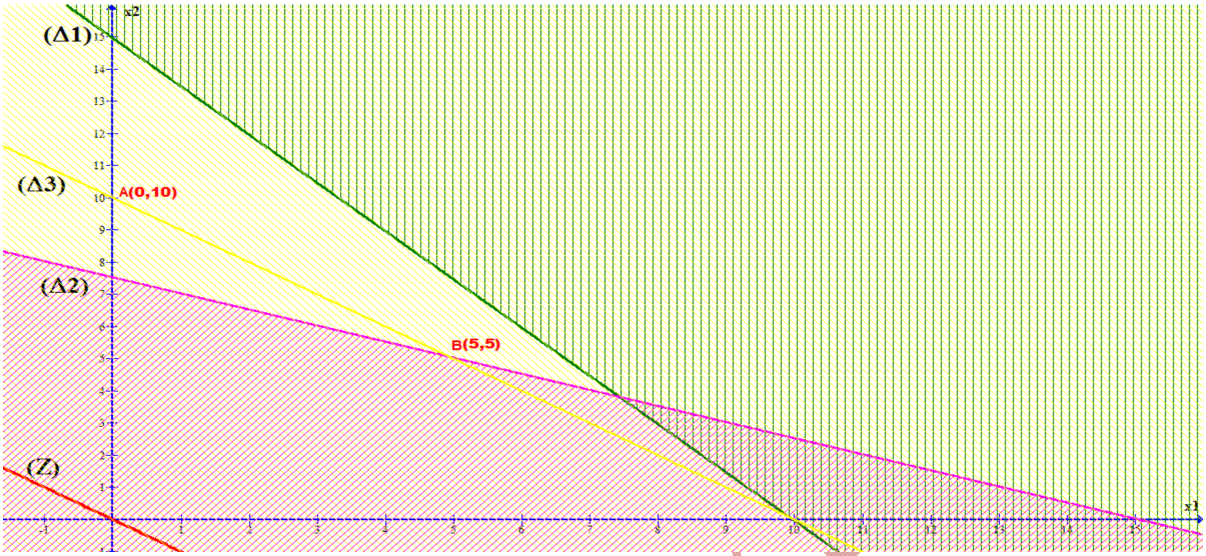
تحويل القيود إلى معادلات وفق ما يلي:

$$\begin{cases} 3X_1 + 2X_2 = 30 \ldots\ldots\ldots(\Delta 1) \\ X_1 + 2X_2 = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 2) \\ X_1 + X_2 = 10 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 3) \end{cases}$$

تحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم

	(Δ1)		(Δ2)		(Δ3)	
X_1	0	10	0	15	0	10
X_2	15	0	7.5	0	10	0

بعد استخراج النقاط المساعدة نستعين ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم الموالي:



من خلال الشكل يظهر أن المستقيم (Z) يوازي المستقيم (Δ3)، وبالتالي عند تحريكه نحو الأعلى فإنه ينطبق على النقطتين (A,B) في نفس الوقت، وعليه فإن الحل الأمثل يتمثل في القطعة المستقيم [AB]، وأي نقطة تنتمي لها تعطي أدنى قيمة لدالة الهدف ب 50 ون، وهذا راجع لكون المستقيم الثالث له نفس ميل خط دالة الهدف.

2.1.6.الحل باستعمال السمبلكس

تظهر هذه الحالة من الحالات الخاصة باستعمال طريقة السمبلكس، إذا كان وجد صفر في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل (يستثنى عمود المتغير الوهمي).

للشروع في الحل بطريقة السمبلكس لابد من الشكل القياسي:

$$\mathrm{Max}(-Z) = -5X_1 - 5X_2$$
$$3X_1 + 2X_2 + S_1 = 30$$
$$-X_1 - 2X_2 + S_2 = -15$$
$$X_1 + X_2 + a_3 = 10$$
$$X_1, X_2 \geq 0,\ S_1, S_2 \geq 0,\ a_3 = 0$$

جداول السمبلكس لهذا البرنامج الخطي:

	(0)	(0)	
T1	X_1	X_2	
(0) S_1	3	2	30
(1) S_2	-1	-2	-15
(-1) a_3	1	1	10
Z^a	-2	-3	x

	(-5)	0	
T2	X_1	a_3	
(0) S_1	1	-2	10
(0) S_2	1	2	5
(-5)X_2	1	1	10
(-Z)	0	-5	-50

رغم وجود قيمة سالبة (−5) في سطر دالة الهدف ضمن الجدول الثاني، إلا أنه يعتبر حلا أمثلا لأنها تقابل متغير وهمي، وبالتالي الحل الأمثل يقتضي إنتاج 10 وحدات من المنتوج الثاني لتحقيق أدنى تكلفة قدرها 50 ون، مع بقاء فرق في القيد الأول قدره 10 وفرق في القيد الثاني قدره 5 وحدات.

كما نلاحظ وجود الصفر في سطر دالة الهدف (القيمة المقابلة لـ X_1) يدل على حالة حلول مثلى بديلة، ولإيجاد الحل البديل نعتبر أن عمود (X_1) هو عمود الارتكاز، ونكمل الخطوات المتبقية.

	(-5)	(0)	
T2	X_1	a_3	
(0) S_1	1	-2	10
(0) S_2	1	2	5
(-5) X_2	1	1	10
(-Z)	0	-50	-50

T3	S_2	a_3	
S_1	-1	-4	5
X_1	1	2	5
X_2	-1	-1	5
(-Z)	0	-5	-50

$X_1=5,\ X_2=5,\ S_1=5,\ S_2=0,\ a_3=0,\ Z=50$

أما الجدول الثالث فيدل على أن الحل الأمثل يقتضي إنتاج 5 وحدات من كلا المنتجين، مع بقاء فرق في القيد الأول قدره 5 وحدات، لتحقق نفس التكلفة 50ون، أما في حالة اختيار عمود المتغير (S_2) كعمود ارتكاز فإننا نرجع للجدول الثاني، وبالتالي نلاحظ أن طريقة السمبلكس في حالة الحلول المثلى البديلة تعطي فقط حلين أمثلين، على عكس الطريقة البيانية التي تعطي عدة حلول مثلى بديلة (كل النقاط المتواجدة على القطعة المستقيمة).

2.6.حالة عدم توفر حدود لمنطقة الحل (**Unbounded Solution**)

يعني ذلك عدم وجود حدود على الحل، وتحدث هذه الحالة عندما تكون منطقة الحلول الممكنة مفتوحة من إحدى الجهات، يعني أن تغير قيمة متغير أو أكثر في المسألة يؤدي إلى زيادة قيمة دالة الهدف.

مثال (9):

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 13X_1 + 8X_2 \\ \begin{cases} 3X_1 + X_2 \geq 15 \\ X_1 + X_2 \geq 9 \\ X_2 \geq 4 \end{cases} \\ X_1 \geq 0. \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام بالطريقة البيانية وطريقة السمبلكس؟

1.2.6.الحل باستعمال الطريقة البيانية:

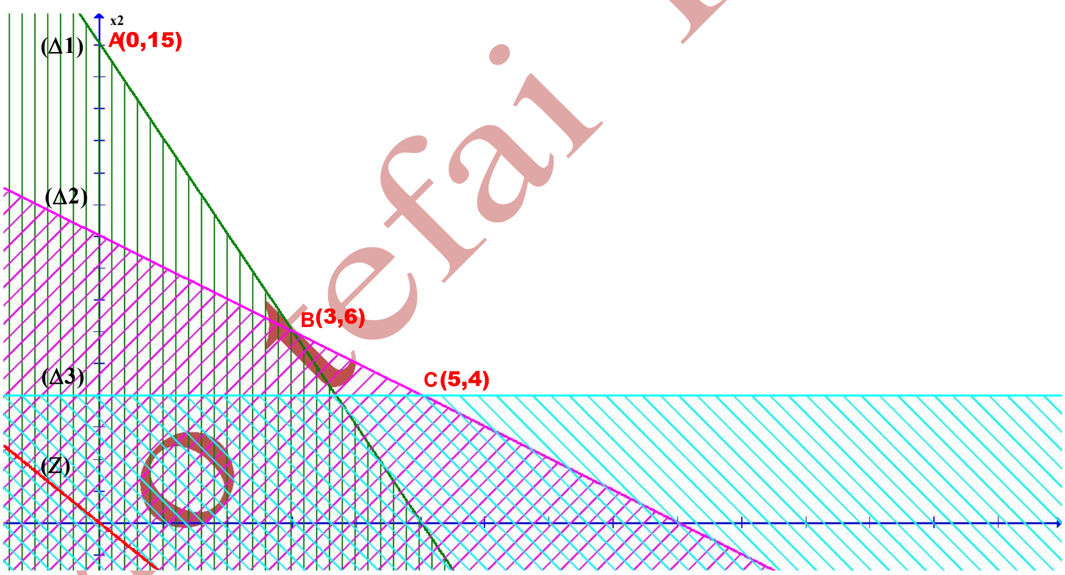
تحويل القيود إلى معادلات وفق الآتي:

$$\begin{cases} 3X_1 + X_2 = 15 \ldots\ldots\ldots(\Delta1) \\ X_1 + X_2 = 9 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta2) \\ X_2 = 4 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta3) \end{cases}$$

تحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم

	X_1	X_2
(Δ1)	0	15
	5	0
(Δ2)	0	9
	9	0
(Δ3)	0	4

الرسم البياني: تم الاستعانة ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم الموالي:



من الشكل نلاحظ، أنه لو يتم إزاحة خط المستقيم لدالة الهدف نحو الأعلى، فإن أول نقطة يمسها هي النقطة (B) ثم النقطة (C)، وأخيرا النقطة (A) التي تعطي أعلى قيمة لدالة الهدف بـ 120 ون، وبما أن منطقة الحلول الممكنة مفتوحة من الأعلى، فإنه كلما زادت قيم (X_1) أو (X_2) أدى ذلك إلى زيادة دالة الهدف، وعليه يمكن القول أن قيمة دالة الهدف لانهاية لها.

2.2.6.الحل باستعمال طريقة السمبلكس

للشروع في إيجاد الحل الأساسي لابد من الشكل القياسي:

$$\begin{aligned}
&\text{Max}(Z)= 13X_1 +8X_2\\
&-3X_1 - X_2+ S_1 = -15\\
&-X_1- X_2 + S_2 = -9\\
&- X_2 + S_3 = -4\\
&X_1, X_2\geq 0, S_1, S_2\geq 0.
\end{aligned}$$

جداول السمبلكس لهذا البرنامج الخطي:

	(0)	(0)	
T1	X_1	X_2	
(1) S_1	-3	-1	-15
(1) S_2	-1	-1	-9
(1) S_3	0	-1	-4
Z^I	-4	-3	x

	(0)	0	
T2	S_2	X_2	
(0) S_1	-3	2	12
(0) X_1	-1	1	9
(1)S_3	0	-1	-4
Z^I	0	-1	x

نلاحظ من الجدولين الأول والثاني أن دالة تكون وهمية بسبب وجود قيم سالبة في العمود الأخير، غير أن في الجدول الثالث والرابع تصبح دالة الهدف حقيقية.

	(0)	(0)	
T3	S_2	S_1	
(8) X_2	-3/2	1/2	6
(13) X_1	1/2	-1/2	3
(0) S_3	-3/2	1/2	2
Z	-5.5	-2.5	87

T4	X_1	S_1	
X_2	3	-1	15
S_2	2	-1	6
S_3	3	-1	11
Z	11	-8	120

من الجدول الرابع نلاحظ وجود قيمة سالبة في سطر دالة الهدف، مما يعني ليس حلا أمثلا، وفي حالة تعيين عمود (S_1) كعمود ارتكاز فإننا لا نستطيع تحديد سطر الارتكاز، لأن حاصل قسمة كل عناصر العمود الأخير على عناصر عمود الارتكاز يكون سالبا.

3.6.حالة استحالة الحل (**Infeasibility**)

ويعني هذه عدم وجود حل يفي باحتياجات كافة القيود، وتظهر هذه الحالة عندما تحتوي المسألة على بعض القيود المتعارضة وفي مثل هذه الحالة يكون من المستحيل تحديد منطقة الحلول الممكنة.

مثال(10):

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 10X_1 + 15X_2 \\ \begin{cases} 3X_1 + 6X_2 \leq 15 \\ 2X_1 + 2X_2 \geq 15 \end{cases} \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام بالطريقة البيانية وطريقة السمبلكس؟

1.3.6. الحل باستخدام الطريقة البيانية

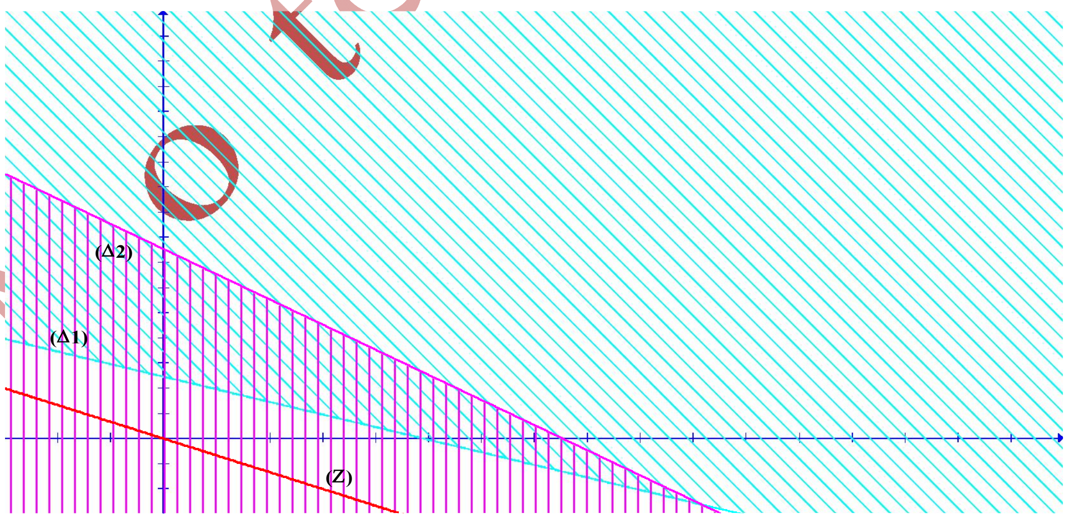
تحويل القيود إلى معادلات وفق الآتي:

$$\begin{cases} 3X_1 + 6X_2 = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 1) \\ 2X_1 + 2X_2 = 15 \ldots\ldots\ldots\ldots(\Delta 2) \end{cases}$$

تحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم

	X_1	X_2
(Δ1)	0	15/6
	5	0
(Δ2)	0	7.5
	7.5	0

الرسم البياني: تم الاستعانة ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم الموالي:



نلاحظ من خلال الشكل أن كل المنطقة مشطبة لتعارض القيدين، وبالتالي نستنتج أن المسألة ليس لها حل.

2.3.6.الحل باستخدام السمبلكس

$$\begin{cases} Max(Z) = 10X_1 + 15\,X_2 \\ 3X_1 + 6\,X_2 \leq 15 \\ 2X_1 + 2\,X_2 \geq 15 \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

للشروع في إيجاد الحل الأساسي لابد من الشكل القياسي:

$$\begin{aligned} &Max(Z)= 10X_1 +15X_2 \\ &3X_1 + 6X_2 + S_1 = 15 \\ &-2X_1 - 2X_2 + S_2 = -15 \\ &X_1, X_2 \geq 0,\ S_1, S_2 \geq 0. \end{aligned}$$

جدول الحل الأساسي

	(0)	(0)	
T1	X_1	X_2	
(0) S_1	3	6	15
(1) S_2	-2	-2	-15
Z^a	-2	-2	x

T2	S_1	X_2	
(0) X_1	1/3	2	5
(1) S_2	2/3	2	-5
(Z^a)	2/3	2	x

بما أن قيم سطر دالة الهدف الوهمية كلها موجبة، والعمود الأخير فيه قيمة سالبة، هذا يعني أنه لا يمكننا المرور إلى المرحلة الموالية، أي لا نستطيع الدخول إلى منطقة الحلول الممكنة (لأن هذه المنطقة أصلا غير موجودة).

4.6.حالة عدم الانتظام (الانحلال) Degenerate Solution

تظهر هذه الحالة عندما يكون أحد أو أكثر من متغيرات التي داخل الأساس قيمتها تساوي الصفر، وعند استخدام طريقة السمبلكس قد تظهر خلال مراحل الحل أو في جدول الحل الأمثل.

مثال(11):

ليكن لديك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 3X_1 + 2\,X_2 \\ \begin{cases} X_1 \leq 3 \\ 2X_1 + X_2 \leq 6 \\ X_2 \leq 2 \\ X_1 + X_2 \leq 3 \end{cases} \\ X_1 \geq 0,\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستخدام بالطريقة البيانية وطريقة السمبلكس؟

1.4.6.الحل باستخدام الطريقة البيانية

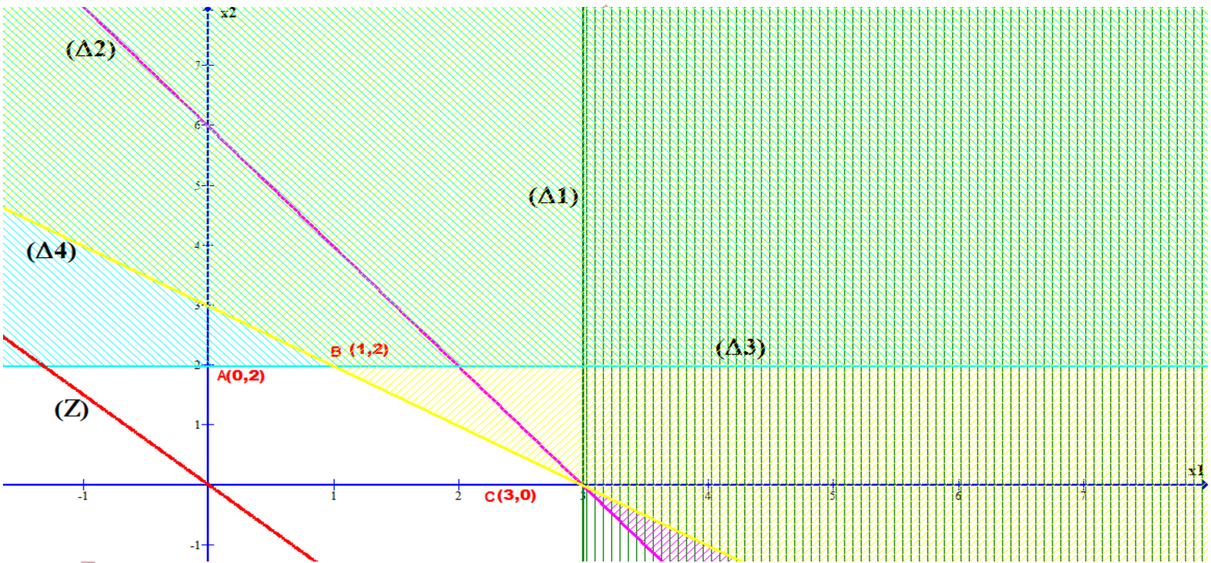
تحويل القيود إلى معادلات وفق الآتي:

$X_1 = 3$.....................($\Delta 1$)
$2X_1 + X_2 = 6$..............($\Delta 2$)
$X_2 = 2$......................($\Delta 3$)
$X_1 + X_2 = 3$................($\Delta 4$)

تحديد النقاط المساعدة في عملية الرسم

	X_1	X_2
($\Delta 1$)	3	0
($\Delta 2$)	0	6
	3	0
($\Delta 3$)	0	2
($\Delta 4$)	0	3
	3	0

الرسم البياني: تم الاستعانة ببرنامج (Graph) للحصول على الرسم الموالي:



نلاحظ من الشكل أن منطقة الحلول الممكنة تتمثل شبه المنحرف (A، B، C، O) والحل الأمثل هو النقطة (C) ذات الإحداثيات ($X_1=3, X_2=0$) التي تعطي أقصى قيمة لـ(Z) وهي 9ون، كما أن المستقيم الثاني لم يغير في هذه المنطقة، وبالتالي هذا المستقيم حيادي.

2.4.6.الحل باستخدام السمبلكس

الشكل القياسي للبرنامج هو كالتالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 3X_1 + 2X_2 \\ \begin{cases} X_1 + S_1 = 3 \\ 2X_1 + X_2 + S_2 = 6 \\ X_2 + S_3 = 2 \\ X_1 + X_2 + S_4 = 3 \end{cases} \\ X_1, X_2 \geq 0, S_1, S_2, S_3, S_4 \geq 0. \end{cases}$$

جدول الحل الأساسي

T1	X_1	X_2	
S_1	1	0	3
S_2	2	1	6
S_3	0	1	2
S_4	1	1	3
Z	-3	-2	0

T2	S_1	X_2	
X_1	1	0	3
S_2	-2	1	0
S_3	0	1	2
S_4	-1	1	0
Z	3	-2	9

نلاحظ أن الجدول الثاني لا يعتبر حل أمثلا، لأن هناك قيمة سالبة في سطر دالة الهدف، وبالتالي نمر للجدول الثالث.

T3	S_1	S_4	
X_1	1	0	3
S_2	-1	-1	0
S_3	1	-1	2
X_2	-1	1	0
Z	1	2	9

يعتبر الجدول الثالث حلا أمثلا، لكن ما يمكن ملاحظته أن هناك متغيرات داخل الأساس وقيمتها صفر، مما يدل على حالة الانحلال.

يمكن تلخيص ما سبق دراسته من الحالات الخاصة في الجدول الموالي:

الحالات الخاصة	طريقة الحل البياني	طريقة السمبلكس
تعدد الحلول المثلى البديلة	مستقيم دالة الهدف يوازي أحد القيود	وجود الصفر في سطر دالة الهدف في جدول الحل الأمثل
عدم توفر حدود لمنطقة الحل	منطقة الحل مفتوحة من إحدى الجهات	لا نستطيع تحديد سطر الارتكاز
استحالة الحل	عدم وجود منطقة الحلول الممكنة	بقاء دالة هدف وهمية مع عدم إمكانية إكمال المرحلة الثانية
عدم الانتظام (الانحلال)	وجود قيد معني بتحديد منطقة الحلول الممكنة إلا أنه لا يؤثر	وجود الصفر في العمود الأخير في جدول من جداول الحل

7. تمارين مقترحة

تمرين (1):

مصنع ينتج ثلاثة منتجات غذائية (A، B، C) وكل منتج يمر بثلاث عمليات مختلفة، الزمن المستغرق (دقيقة) لإنتاج وحدة واحدة من كل منتج والطاقة المتاحة لكل عملية (دقيقة /يوم) وربح الوحدة الواحدة لكل منتج (ون) كانت كالآتي:

العملية	الزمن المستغرق (دقيقة)			الطاقة المتاحة
	المنتج (A)	المنتج (B)	المنتج (C)	
الخلط	1	2	1	430 د
الطهي	3	0	2	460 د
التغليف	1	4	0	7سا
الربح	3	2	5	

إن دراسات السوق أشارت إلى أن عدد الوحدات المباعة من المنتج الأول تمثل ضعف عدد الوحدات المباعة من الثاني والثالث معا.

المطلوب: صياغة نموذج البرمجة الخطية لتعظيم الربح مع مراعاة أن مجموع الطاقات المتاحة غير المستغلة (العاطلة) للعمليات الثلاثة يجب أن لا تزيد عن 10 دقائق /يوم.

تمرين (2):

مزارع لديه ارض مساحتها 150 هكتار، وفي إطار الاستفادة من مياه السد المجاور له، تمنحه الدولة ما قدره 500 م^3، فيها من العمال ما يكفي لتغطية 480 ساعة عمل، يمكن زراعة هذه الأرض بالعدس والفاصوليا، على أن لا تتجاوز في كل الظروف المساحة المخصصة للعدس 90 هكتار. مع العلم أن سقي هكتار واحد من العدس يتطلب 4 م^3 والفاصوليا 2 م^3، بينما يحتاج هكتار واحد من العدس إلى ساعة عمل، في حين الفاصوليا أربع ساعات عمل. إذا كان الربح المتوقع للهكتار الواحد من العدس هو 100ون والفاصوليا 200 ون، فما هو أفضل استخدام لهذه الأرض.

تمرين(3):

مصنع يقوم بصنع نوعين من السيارات (A، B) ، وكل نوع يمر بورشتين: ورشة التجميع، ورشة الطلاء، لنفرض أن إجمالي ساعات العمل في كلا الورشتين يجب أن لا تقل عن 720، 480 ساعة على التوالي، وأن صنع سيارة واحدة من النوع (A) يحتاج إلى 4 ساعات عمل في ورشة التجميع، 6 ساعات في ورشة الطلاء، بينما صنع سيارة واحدة من النوع (B) يحتاج إلى 6 ساعات عمل في ورشة التجميع، و3 ساعات في ورشة الطلاء.

يقدر الطلب المتوقع على النوعين من السيارات بـ 20 سيارة على الأقل من النوع (A)، و30سيارة على الأقل من نوع (B). فإذا علمت أن الربح الوحدوي الناجم عن بيع السيارتين (A، B) هو على التوالي: 400، 300ون، وضح كيف يمكن صياغة مشكلة البرمجة الخطية لهذه المعطيات؟

تمرين (4):

تنتج شركة (Chiken) نوعين من غذاء الدواجن، حيث يحتوي النوع الأول على 2.5 كغ من الذرة، 125 غ صوجا، 175 كغ من الشعير، في حين النوع الثاني يحتوي على 7.5 كغ ذرة، 125 غ صوجا، و10كغ شعير، فإذا علمت أن الطاقة المتاحة من الذرة والصوجا والشعير هي: 240 كغ، 5كغ، 595 كغ على التوالي. كما أن ربح الوحدة الواحدة من النوع الأول من الغذاء هو 65 ون والنوع الثاني 115 ون، فما هو عدد الوحدات التي يجب إنتاجها من كلا النوعين لتحقيق أقصى ربح ممكن؟

تمرين (5):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 10X_1 + 3X_2 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 30 \\ X_1 + 2X_2 \geq 15 \\ X_1 = 9 \\ X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: ايجاد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بيانيا؟

تمرين (6):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 6X_1 + 4X_2 \\ -3X_1 + 2X_2 \leq 4 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 16 \\ X_1 \leq 3 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بيانيا؟

تمرين (7):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 2X_1 + 3X_2 + 3X_3 \\ 3X_1 + 2X_2 \leq 60 \\ -X_1 + X_2 + 4X_3 \leq 10 \\ 2X_1 - 2X_2 + 5X_3 \leq 50 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس المناسبة؟

تمرين (8):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Max(Z) = 4X_1 + 5X_2 + 3X_3 \\ X_1 + 2X_2 + X_3 \leq 50 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 \geq 10 \\ X_1 + X_2 = 40 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس على مرحلتين؟

تمرين (9):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Min(Z) = 5X_1 - 2X_2 + 3X_3 \\ 2X_1 + 2X_2 - X_3 \geq 2 \\ 3X_1 - 4X_2 \leq 3 \\ X_2 + 3X_3 \leq 5 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس على مرحلتين؟

تمرين (10):

إليك البرنامج الخطي التالي:

$$\begin{cases} Min(Z) = 5X_1 + 15X_2 + 20X_3 \\ 2X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 500 \\ 2X_2 \leq 200 \\ X_2 + 2X_3 \leq 400 \\ X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: جد الحل الأمثل لنموذج البرمجة الخطية باستخدام طريقة السمبلكس بإدخال متغير وهمي؟