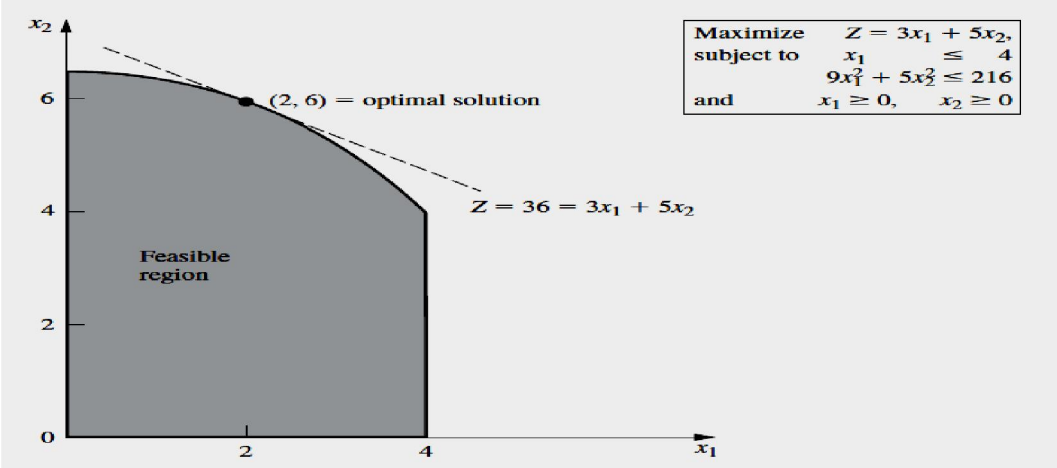
تمهيد

رأينا في الفصل الأول أن البرنامج الخطي تكون فيها دالة الهدف وجميع القيود في صورة خطية، بينما البرنامج غير الخطي (Non Linear Programming)، ويسمى اختصارا (NLP)، تكون فيه بعض العلاقات أو دالة الهدف غير خطية. كما هو موضح في الشكلين التاليين:

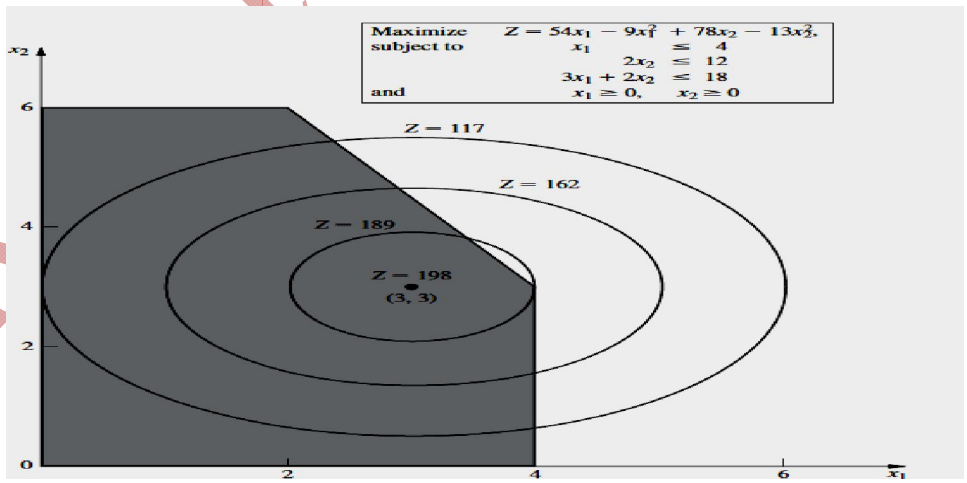
الشكل(2): الرسم البياني لبرنامج غير خطي



Source : Frederick S.hillier & Gerald J.Lieberman, « Introduction to Operations Research »,10th edition, Mc Graw Hill education, USA, 2015, p553

نلاحظ من الشكل (2) أن هذا البرنامج غير خطي لأنه يحتوي على قيد غير خطي(القيد الثاني).

الشكل(3): الرسم البياني لبرنامج غير خطي



Source : Frederick S.hillier & Gerald J.Lieberman, « Introduction to Operations Research »,10th edition, Mc Graw Hill education, USA, 2015, p554

نلاحظ من الشكل (3) أن هذا البرنامج غير خطي لأنه يحتوي على دالة هدف غير خطية.

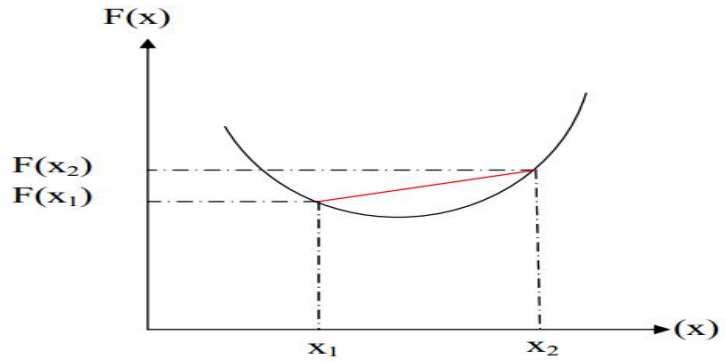
في كلتا الحالتين تظهر لنا صعوبة البحث عن الحل الأمثل نظرا لعناصر البرنامج غير الخطي(دالة هدف أو أحد قيد)، وبالتالي هذه البرمجة تعد أكثر صعوبة مقارنة بالبرمجة الخطية.

كمدخل لدراسة هذا النوع من البرمجة ستناول النقاط التالية:

1.الدوال المقعرة والمحدبة (Concave & Convex Functions)

لنفترض بأنه لدينا دالة $f(x)$، وتم أخذ قيمة الدالة عند نقطتين (X_1,X_2)، كما هو موضح في الشكل التالي:

الشكل (4): دالة غير خطية محدبة



الآن لو نأخذ معامل قدره (α)، حيث قيمته تكون ما بين الصفر والواحد $\propto \in [0,1]$ ، عندها نستطيع اختبار الدالة إذا كانت محدبة أم لا من خلال تطبيق العلاقة التالية:

$$f[\propto x_1 + (1-\propto)x_2] \leq \propto f(x_1) + (1-\propto)f(x_2)$$

فإذا تحققت هذه المتراجحة عند أي زوجين من نقاط (X_1,X_2) هذا الفضاء R نقول أن الدالة محدبة.

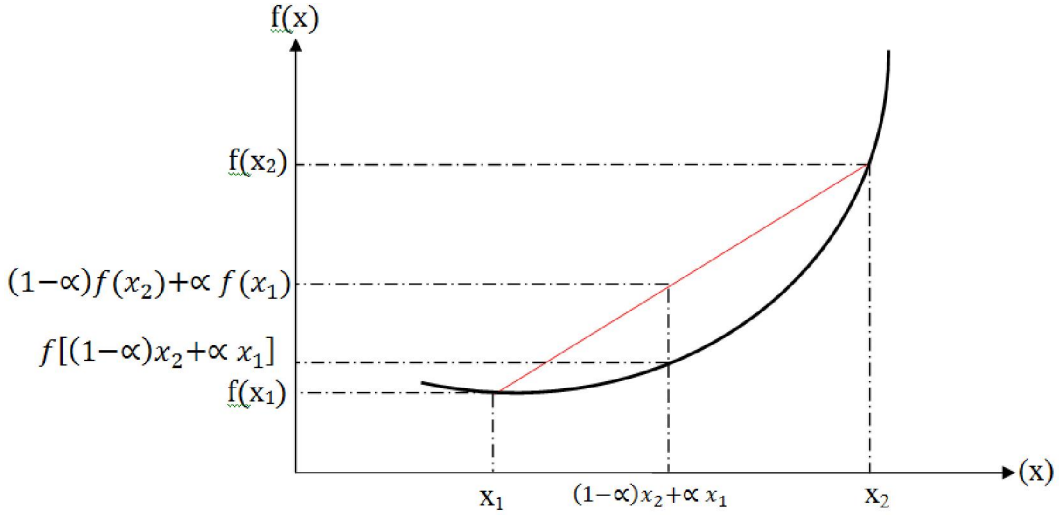
وتكون الدالة $f(x)$ مقعرة إذا وجدت نقطتين في فضاء بعده n بشرط أن يكون:

$$f[\propto x_1 + (1-\propto)x_2] \geq \propto f(x_1) + (1-\propto)f(x_2)$$

ومن الناحية الهندسية تعتبر الدالة ذات متغير واحد محدبة إذا كان الخط المستقيم الرابط بين أي نقطتين (الوتر) على رسم الدالة يقع فوق الرسم البياني للدالة نفسها.

Mostefa Cine

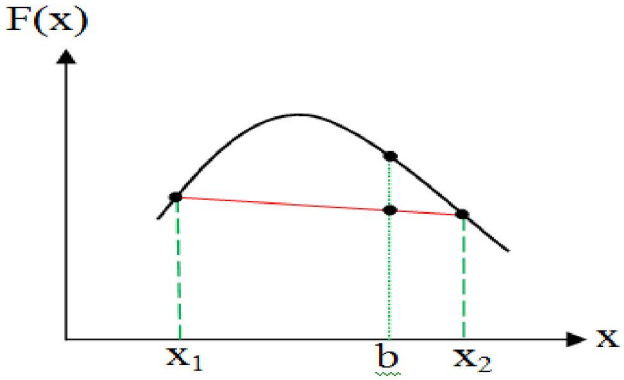
الشكل (5): دالة غير خطية محدبة



المصدر: ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغبارى،" بحوث العمليات"، ط2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2002، ص138.

أما إذا كان شكل الدالة منحنى ذو قمة ومفتوح من الأسفل يشبه الجرس، فإن الخط الرابط بين أي نقطتين من هذا المنحنى يقع أسفله وبالتالي دالة مقعرة، كما هو موضح في الشكل الموالي:

الشكل (6): دالة غير خطية مقعرة



Source : Michael W.Carter& other, « Operations Research a Pratical Introduction »,2nd edition, CRC press, 2019, USA, p220.

نظرية:

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة ومستمرة على الفترة [a,b]، والنقطة x_0 تنتمي لهذا المجال، فإنه يكون لدينا:

- نقطة صغرى محلية **يجب** أن يتحقق ما يلي:

المشتقة الأولى تساوي الصفر($\frac{\delta f}{\delta x} = 0$) عند $x = x^*$ ، والمشتقة الثانية $\frac{\delta^2 f}{\delta^2 x} \geq 0$

- نقطة عظمى محلية **يجب** أن يتحقق ما يلي:

المشتقة الأولى تساوي الصفر ($\frac{\delta f}{\delta x} = 0$) عند $x = x^*$ ، المشتقة الثانية موجبة $\frac{\delta^2 f}{\delta^2 x} \leq 0$

- نقطة صغرى محلية **يكفي** أن يتحقق ما يلي:

المشتقة الأولى تساوي الصفر ($\frac{\delta f}{\delta x} = 0$) عند $x = x^*$ ، المشتقة الثانية موجبة $\frac{\delta^2 f}{\delta^2 x} > 0$

- نقطة عظمى محلية **يكفي** أن يتحقق ما يلي:

المشتقة الأولى تساوي الصفر ($\frac{\delta f}{\delta x} = 0$) عند $x = x^*$ ، المشتقة الثانية موجبة $\frac{\delta^2 f}{\delta^2 x} < 0$

مثال(30): لتكن لديك الدالة الآتية:

$$Min\ \mathrm{f(x)} = 2x^3 - 6x + 12$$

المطلوب: أوجد النهايات العظمى والصغرى، ثم حدد شكل الدالة؟

الحل:

نقوم بحساب المشتقة الأولى ثم نساويها بالصفر.

$$\mathrm{f'(x)} = 6x^2 - 6$$

$$6x^2 - 6 = 0 \leftrightarrow x^2 = 1$$

بالتالي نحصل على حلين هما (1) و(-1)، أما المشتقة الثانية لهذه الدالة هي كما يلي:

$$\mathrm{f''(x)} = 12x$$

عند تعويض القيمة (1) في المشتقة الثانية تكون قيمتها موجبة، وبالتالي هذه النقطة تمثل نهاية صغرى (الدالة محدبة)، بينما عند تعويض القيمة (-1) في المشتقة الثانية تكون قيمتها سالبة، وبالتالي هذه النقطة تمثل نهاية عظمى (الدالة مقعرة).

1.1.تأثير التقعر والتحدب في البحث عن الحلول المثلى

إن شكل الدالة (محدبة أم مقعرة) له تأثير على الحل الأمثل، لذا سنصادف الحالات التالية:

1.1.1.حد أعظمي أو أصغري–غير مقيد

Mostefai Yacine

إذا كان برنامج غير خطي غير مقيد يتألف من دالة هدف بمتغير واحد $f(x)$، وكانت هذه الدالة محدبة أو مقعرة، فإنه يوجد حل أمثل وحيد عند نقطة تقع أولا داخل المنطقة المقبولة، حيث تنعدم جميع المشتقات وثانيا عند نقطة حدية.

2.1.1.قيمة أعظمية– مقيد

إذا كان برنامج غير خطي يتألف من دالة هدف وقيود، فإن كون الحل الأمثل وحيد يتوقف على طبيعة شكل دالة الهدف ومجموعة القيود، تشكل منطقة محدبة عندها يوجد حل أعظمي وحيد للمسالة (لذا يجب أن تكون أي نقطة مستقرة حلا أعظميا شموليا).

3.1.1.قيمة أصغرية– مقيد

إذا كان برنامج غير خطي يتألف من دالة هدف وقيود، وكانت دالة الهدف محدبة وكذلك مجموعة القيود تشكل منطقة محدبة، فإن أي نقطة مستقرة ستكون حلا أصغريا شموليا.

2.أمثلية دالة ذات المتغير المفرد بدون قيود (Single-Variable Optimization)

سندرس كيفية حل البرامج غير الخطية غير المقيدة والتي تحتوي على متغير واحد فقط، حيث تأخذ الصيغة العامة التالية:

$$\text{Opt: } Z = f(x)$$

حيث أن:

Opt: تمثل الأمثلية (Optimization) قد تكون تعظيم (Maximize) أو تصغير (Minimize).

$f(x)$: تمثل الدالة غير الخطية ذات المتغير الوحيد (x).

ويكون البحث عن الأمثلية (تعظيم أو تصغير) في الفترة غير المحدودة $]-\infty,+\infty[$ ، أما إذا كان البحث في مجال محدود بـ [a,b]، فإن البرنامج السابق يصبح كالأتي:

$$\text{Opt: } Z = f(x)$$

$$\text{subject to: } a \leq x_0 \leq b$$

مثال(31):

Mostefai Yacine

لتكن لديك الدالة التالية:

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$$

أوجد النقاط العظمى والصغرى لهذه الدالة؟

الحل:

أولا نقوم باستخراج المشتقة الأولى ونساويها بالصفر من اجل استخراج النقاط الحرجة:

$$f'(x) = 3x^2 - 18x + 24$$
$$3x^2 - 18x + 24 = 0 \leftrightarrow (x-2)(x-4) = 0$$
$$x = 2, x = 4$$

تسمى هذه النقاط بالنقاط الحرجة (2، 4).

ثانيا نحسب المشتقة الثانية ونساويها بالصفر

$$f''(x) = 6x - 18$$
$$6x - 18 = 0 \leftrightarrow x = 3$$

نعوض القيمتين (2، 4) في المشتقة الثانية فنحصل على:

$$f''(2) = 6(2) - 18 = -6 < 0$$
$$f''(4) = 6(4) - 18 = 6 > 0$$

انطلاقا من النتائج نستنتج أن القيمة 2 هي قيمة عظمى محلية، بينما القيمة 4 هي قيمة صغرى محلية.

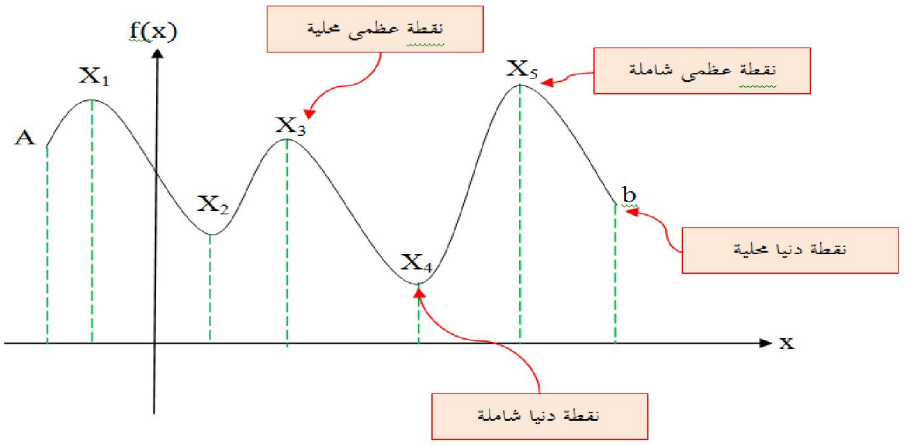
1.2.الأمثلية المحلية والشاملة (Local & Global Optimum)

إذا كانت لدينا دالة $f(x)$ المعرفة والمستمرة في المجال $]-\infty, +\infty[$ ، فإن للدالة حد أدنى عند X_0 وجد مجال محدود ذو مركز x_0 بحيث يحقق $f(x) \geq f(x_0)$ لكل قيم x في هذا المجال الذي تتحدد فيه الدالة، وعليه إذا تحقق هذا الشرط فإن الحد الأدنى عند x_0 يكون حد أدنى شاملا.

مثال: لتكن لدينا الدالة $f(x)$ المعرفة بالمجال [A,b].

الشكل (7): الدالة اللاخطية غير المقعرة وغير المحدبة

Mostefai Yacine



المصدر: ريتشارد برونسون، ترجمة حسن حسني الغباري،" بحوث العمليات"، ط2، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية، مصر، 2002، ص135.

نلاحظ من الشكل أن منحنى الدالة محدود بثلاث نقاط عظمى محلية هي: X_1، X_3، X_5، إلا أن النقطة X_5 تعتبر نقطة عظمى شاملة، لأنها تمثل أعلى قيمة للدالة المدروسة في المجال [A,b]. كما أن هذا المنحنى محدود بنقاط دنيا محلية هي: A، X_2، X_4، b، إلا أن النقطة X_4 تعتبر نقطة دنيا شاملة كونها تمثل أدنى قيمة للدالة في المجال المدروس.

3.أمثلية متعددة المتغيرات بدون قيود Multivariable Optimization Without constraints

يأخذ البرنامج غير الخطي غير المقيد لأكثر من متغير الصيغة العامة التالية:

$$\text{Opt: } Z = f(x) \qquad x = (x_1, x_2, x_3 \dots \dots . x_n)^T$$

حيث أن:

Opt: تمثل الأمثلية (Optimization) في شكل تعظيم (Maximize)؛

$f(x)$: تمثل الدالة ذات عدة متغيرات (x)، حيث تكون غير خطية.

ويكون البحث عن الأمثلية (تعظيم Max) في الفترة غير المحدودة $]-\infty, +\infty[$ ، أما إذا كانت البرامج في صورة تصغير(Min) فنقوم باستبدال $f(x)$ بالدالة $-f(x)$

1.3.الحدود العظمى المحلية والشاملة

الجوار $(\in)$ حول هو مجموعة كل المتجهات x ، بحيث أن:

$$(x - \hat{x})^T(x - \hat{x}) = (x_1 - \hat{x}_1)^2 + (x_2 - \hat{x}_2)^2 + \dots \dots . (x_n - \hat{x}_n)^2 \leq \in^2$$

Mostefai Yacine

ومن الناحية الهندسية يكون الجوار $(\in)$ حول $\widehat{\ }$ هو المداخل، والحدود لكرة متعددة الأبعاد نصف قطرها $(\in)$ ومركزها $\hat{x}$. والدالة الهدفية $f(x)$ لها حد أعلى محلي عند $\hat{x}$ إذا وجد جوار $(\in)$ حول $\hat{x}$، بحيث أن:

$$f(x) \leq f(\hat{x})$$

لكل قيم x في هذا الجوار $(\in)$ الذي تتحدد فيه الدالة، وإذا تحقق الشرط لكل قيمة موجبة $(\in)$ (ليس المهم القيمة نفسها)، فإن $f(x)$ يكون لها حد أعلى شامل عند $\hat{x}$.

2.3.شعاع المشتقات الجزئية والمصفوفة الهيسية (Gradient & Hessian Matrix)

إذا كانت الدالة غير خطية متعددة المتغيرات$f(x_1, x_2, x_3 \dots \dots . x_n)$ ، فإن شعاع المشتقات الجزئية الأولى المرتبط بهذه الدالة يرمز له بـ $\nabla f(x_i)$ ، والذي يعطى بالعلاقة التالية:

$$\nabla f(x_1, x_2, x_3 \dots \dots . x_n) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right]$$

وتعرّف المصفوفة الهيسية (مصفوفة المشتقات الجزئية الثانية) للتابع $f(x_1, x_2, x_3 \dots \dots . x_n)$، والتي نرمز لها بـ $H(x_1, x_2, x_3 \dots \dots . x_n)$ بالعلاقة التالية:

$$H_{ij} = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right]$$

وهي مصفوفة مربعة متناظرة ذات الأبعاد n×n.

بينما الشكل العام للمصفوفة الهيسية يأخذ الصيغة التالية:

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

يمكن تشكيل عدة محددات انطلاقا من العنصر الموجود في الزاوية اليسارية العليا ثم بالتتابع عبر كامل المصفوفة من أعلى اليسار إلى أدنى اليمين. نرمز لهذه المحددات $(D_1, D_2, D_3 \dots \dots . D_n)$، وتكون الاختبارات التالية صالحة للاستخدام:

- تكون نقطة صغرى إذا كانت المحددات $(D_1, D_2, D_3 \dots \dots . D$ جميعها موجبة.

Mostefai Y acine

- تكون نقطة عظمى إذا كانت المحددات الزوجية موجبة($D_j > 0 \ \ j = 1,3, \dots$)، والفردية سالبة ($D_j < 0 \ \ j = 2,4, \dots$).

ملاحظة:

إذا كانت الدالة غير خطية تتألف من متغيرين $f(x_1, x_2)$ يمكننا الاستعانة بالجدول التالي لمعرفة ما إذا كانت الدالة محدبة أم مقعرة.

	محدبة	التحدب الكامل(التام)	مقعرة	التقعر الكامل(التام)
المشتقة الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$	$0\leq$	$0<$	$0\geq$	$0>$
المشتقة الثانية $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$	$0\leq$	$0<$	$0\geq$	$0>$
المحدد $\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}\right)^2$	$0\leq$	$0<$	$0\leq$	$0<$

مثال(32):

لتكن لدينا الدالة التالية:

$$f(x_1, x_2) = (x_1 - x_2)^2$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

نلاحظ أن المصفوفة متناظرة ذات الرتبة 2×2 وجميع عناصر القطر موجبة.

نحسب محدد المصفوفة الهيسية:

$$|H| = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

بما أن محدد المصفوفة الهيسية معدوم والمشتق الثاني لكلا المتغيرين أكبر من الصفر، فإن الدالة $f(x_1, x_2)$ محدبة.

4.الأمثلية غير الخطية المقيدة (Non Linear Constrained Optimization)

Mostefai Y

توجد طرق كثيرة لحل البرامج غير الخطية المقيدة من بينها: طريقة فيبوناشي Fibonacci، نيوتن رافسون Newton Raphson ، وطريقة كون توكر Kuhn Tuker...الخ، إلا أن أبرز الأساليب المستخدمة في حل هذا النوع من البرامج غير الخطية ما يعرف بـ "مضاعف لاغرانج Lagrange Multiplier".

1.4.طريقة مضاعف لاغرانج (Lagrange Multiplier)

تعود هذه الطريقة إلى الفرنسي Joseph Louis Lagrange ، حيث تطبق على البرامج غير الخطية المقيدة بقيود مساواة وفق الصيغة التالية:

$$\text{Maximize } f(x) \qquad \text{where } x = x_1, x_2, x_3 \dots \dots . x_n$$

$$\text{subject to: } g_i(x) = b_i \qquad \text{for } i = 1,2,3 \dots \dots \dots m$$

حيث أن:

$f(x)$: دالة الهدف مستمرة وقابلة للتفاضل.

$g(x)$: قيود المسالة.

يتم استعمال هذه وفق الخطوات التالية:

- تكوين دالة لاغرانج على النحو التالي:

$$L(x, \lambda) = f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i [g_i(x) - b_i]$$

حيث أن: λ_i تمثل ثوابت مجهولة تسمى بمضاعفات لاغرانج.

- إيجاد المشتقات الجزئية لدالة لاغرانج بالنسبة لكل متغير (X، λ)؛
- مساواة المشتقات الجزئية بالصفر، ثم نقوم بحل جملة المعادلات المتحصل عليها جملة واحدة.

مثال(33):

نفترض أن شركة (Kloster) تقوم بإنتاج نوعين من السلع، وأن إجمالي تكلفتها:

$$TC = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1 Q_2$$

حيث أن:

Mostefai Yacine

Q_1 : تمثل الكمية المنتجة من السلعة الأولى.

Q_2: تمثل الكمية المنتجة من السلعة الثانية.

ونتيجة لالتزامات الشركة اتجاه عمالها، فإنه يتحتم على الشركة إنتاج 30 وحدة بالضبط في الساعة من السلعتين معا.

المطلوب: إيجاد الكميات المثلى التي تخفض التكلفة إلى أدنى حد ممكن؟

الحل:

يمكن كتابة البرنامج غير الخطي للمسالة كما يلي:

$$\begin{cases} TC = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2 \\ Q_1 + Q_2 = 30 \\ Q_1 \geq 0, Q_2 \geq 0 \end{cases}$$

لحل البرنامج نشكل دالة لاغرانج بعد تحويل القيد كما يلي:

$$Q_1 + Q_2 - 30 = 0$$

ثم نكوّن دالة لاغرانج L_{TC}:

$$L_{TC} = 4Q_1^2 + 5Q_2^2 - Q_1Q_2 - \lambda(Q_1 + Q_2 - 30)$$

نشتق الدالة L_{TC} بالنسبة إلى كل من هذه المتغيرات الثلاثة Q_1، Q_2، وλ :

$$\frac{\partial L_{TC}}{\partial Q_1} = 8Q_1 - Q_2 - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{TC}}{\partial Q_2} = 10Q_2 - Q_1 - \lambda$$

$$\frac{\partial L_{TC}}{\partial \lambda} = -Q_1 - Q_2 + 30$$

ثم نجعل هذه المشتقات الثلاثة مساوية للصفر حتى نتمكن من الحصول على أدنى قيمة لـ TC وعليه:

$$8Q_1 - Q_2 - \lambda = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

$$10Q_2 - Q_1 - \lambda = 0 \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2)$$

Mostefai Yacine

$-Q_1-Q_2+30=0.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$

بطرح المعادلة (2) من (1) نحصل على:

$11Q_2-9Q_1=0\rightarrow Q_2=9/11Q_1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$

بتعويض قيمة Q_2 في المعادلة (3) نجد:

$Q_1=16.5$

وعليه:

$Q_2=13.5$

$\lambda=118.5$

$TC=1777.5$

أي أن الحل الأمثل يتطلب إنتاج 16.5 وحدة من السلعة الأولى، و13.5 وحدة من السلعة الثانية لتحقيق أدنى تكلفة ممكنة تقدر بـ 1777.5 ون.

2.تمارين مقترحة

تمرين (1):

اختبر هذه الدوال من حيث التقعر والتحدب؟

$f(x)=10x-x^2$

$f(x)=x^4+6x^2+12x$

$f(x)=3x_1+2x_1^2+4x_2+x_1^2-2x_1x_2$

$f(x)=-2x_1^2-x_1^2+x_1x_2$

تمرين(2):

لتكن لديك الدالة التالية:

$f(x)=x^4-3x^3-2x+2x^2+7$

$1\leq x\leq 10$

المطلوب: اختبر تحدب الدالة في هذا المجال؟

Mostefai Yacine

تمرين(3):

إذا كانت دالة الإنتاج لشركة ما هي: Q=7XY

حيث :

X: عدد ساعات العمل؛

Y: الكمية اللازمة من المواد.

وبافتراض أجرة ساعة العمل 10 ون وتكلفة الكيلو من المواد الأولية 2 ون، وأن الحد الأقصى لتكاليف الشركة 1000ون، فما هو أكبر إنتاج ممكن لهذه الشركة؟

تمرين (4):

ليكن لديك البرنامج غير الخطي التالي:

$$\begin{cases} \max f(x) = 4x_1^2 + 2_2^2 + 3_3^2 - 4x_1x_2 \\ x_1+x_2+x_3 = 15 \\ 2x_1-x_2+2x_3 = 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

المطلوب: أوجد الحل الأمثل باستعمال أسلوب لاغرانج؟

Mostefai Yacine